

UNIVERSITY OF TORONTO



3 1761 01206112 3

HAYDOCK
AT THE



UNIVERSITY OF
TORONTO PRESS





THEORIE UND ANWENDUNG
DER
DETERMINANTEN

VON

DR. RICHARD BALTZER

OBERLEHRER AM STÄDTISCHEN GYMNASIUM ZU DRESDEN, MITGLIED DER K. SÄCHS.
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG

ZWEITE VERMEHRTE AUFLAGE

LEIPZIG
VERLAG VON S. HIRZEL
1861.

12011
12/1/91

DUBLETTE

Vorrede

zur ersten Auflage.

Das mächtige Instrument der Algebra und Analysis, welches unter dem Namen der Determinanten in Gebrauch gekommen ist, war aus den bis vor wenig Jahren vorhandenen Quellen nicht leicht kennen zu lernen. Die grossen Meister hatten jenes Hülfsmittel für die höheren Zwecke, denen ihr Genius diente, sich geschaffen und waren wenig gesonnen, ihren Bau durch Betrachtungen über Material und Werkzeug, von deren Tüchtigkeit sie tiefe Ueberzeugung hatten, aufzuhalten. Daher ist es mit den Determinanten wie wohl mit allen wichtigen Instrumenten der Mathematik ergangen, dass sie längere Zeit im Besitz von wenig Auserwählten blieben, bevor eine geordnete Theorie derselben den Nichtkennern das Verständniss und den Gebrauch zugänglicher machte. Die erste Idee, der Algebra durch Bildung combinatorischer Aggregate, die heute Determinanten genannt werden, zu Hülfe zu kommen, rührt, wie Herr Professor DIRICHLET bemerkt hat, von LEIBNIZ her. Ausser dem Briefe an L'HOSPITAL 1693 April 28, worin LEIBNIZ die Ueberzeugung von der Fruchtbarkeit seines Gedankens ausspricht, scheint aber nichts übrig zu sein, woraus sich schliessen liesse, dass LEIBNIZ sich um weitere Früchte dieser Idee bemüht habe. Die zweite Erfindung der Determinanten durch CRAMER 1750 blieb unverloren wegen der Dienste, die der Algebra daraus erwachsen theils durch CRAMER selbst, theils nach einer Reihe von Jahren durch BEZOUT, VANDERMONDE, LAPLACE, LAGRANGE. Namentlich war es VANDERMONDE (sur l'élimination 1771), der einen Algorithmus der Determinanten zu

begründen suchte, während LAGRANGE in der classischen Abhandlung *sur les pyramides* 1773 von den Determinanten dritten Grades bei Problemen der analytischen Geometrie bereits in grosser Ausdehnung Gebrauch machte. Den wichtigsten Anstoss jedoch zur weiteren Ausbildung der Rechnung mit Determinanten haben GAUSS' *Disquisitiones arithmeticae* 1801 gegeben. Ausgehend von der Betrachtung der Algorithmen, welche in diesem Werke sich auf die »Determinanten der quadratischen Formen« beziehen, stellten BIXER und CAUCHY 1812 die allgemeinen Regeln für die Multiplication der Determinanten auf, wodurch Rechnungen mit schwer zu bewältigenden Aggregaten eine unerwartete Leichtigkeit gewannen. Des neuen Calcüls, welchen besonders CAUCHY weiter ausgebildet hatte, bemächtigte sich mit schöpferischer Kraft vorzüglich JACOB 1826, dessen in Crelle's Journal niedergelegte Arbeiten reichlich Zeugnis geben, was das neue Instrument in des Meisters Hand zu leisten vermochte. Erst durch JACOB'S Abhandlungen »de formatione et proprietatibus determinantium« und »de determinantibus functionalibus 1841« wurden die Determinanten Gemeingut der Mathematiker, welches seitdem von verschiedenen Seiten her wesentliche Vermehrungen erhalten hat.

JACOB'S Abhandlung *de formatione etc.*, welche nicht unmittelbar für das erste Studium des Gegenstandes verfasst ist, und SPOTTISWOODE *elementary theorems relating to determinants*, London 1851, eine Schrift, welche bei zweckmässiger Anordnung des Stoffes und einer guten Auswahl von Beispielen manche Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten enthält, wodurch ihrem Werthe Eintrag geschieht, waren die einzigen vorhandenen Anleitungen zur Kenntniss der Determinanten, als ich mich entschloss, das zum grossen Theil noch zerstreute Material in eine Theorie der Determinanten, begleitet von den wichtigsten Anwendungen derselben, zusammenzustellen. Meine Arbeit war fast zum Abschluss gebracht, als mir BUROSCCHI *la teoria dei determinanti*, Pavia 1854, bekannt wurde. Dieses Werk, hervorgerufen durch das auf vielen Seiten gefühlte Bedürfniss einer elementaren Anleitung zur Kenntniss der Determinanten, ist, wenn auch in den Elementen nicht immer streng, doch mit vorzüglicher Sachkenntniss geschrieben und enthält einen reichen Schatz trefflichen Materials, wodurch es schnell in weiten

Kreisen Eingang und Anerkennung sich verschafft hat. Die jüngst in Berlin erschienene deutsche Uebersetzung dieses werthvollen Buches ist ohne Zweifel den deutschen Mathematikern sehr willkommen. Dass ich den Muth hatte, meine Schrift über denselben Gegenstand zu vollenden, gründet sich hauptsächlich auf die Verschiedenheit in der Anlage und Ausführung meiner Arbeit. Um den theoretischen Kern des Gegenstandes möglichst rein herauszuschälen, habe ich die Haupteigenschaften der Determinanten und die darauf gegründeten Algorithmen in synthetisch genau articulirtem Vortrag, wie er den Lehrbüchern von Alters her eignet, abgehandelt und wo es nöthig schien durch einfache Beispiele erläutert. Es kann zur klaren Einsicht in die Lehrsätze eines Systems nur erwünscht sein, bei jedem Lehrsätze die Summe der Prämissen, auf denen er beruht, straff zusammengezogen zu sehen. Dagegen habe ich die Anwendungen auf Algebra, Analysis und Geometrie in einen besondern Abschnitt vereinigt, um durch grösseren Zusammenhang leichtere Auffassung und in den einzelnen Materien eine gewisse Vollständigkeit erreichen zu können. Ueberall aber habe ich mit unablässigem Bemühen den Lehrsätzen und Beweisen möglichste Präcision zu verleihen gesucht, wo sie derselben noch zu entbehren schienen. Bei Annahme von Bezeichnungen und Benennungen in diesem Gebiete glaubte ich ängstliche Vorsicht anwenden zu müssen, weil die neuere Mathematik ohnediess von manchen Ausschweifungen zügelloser Terminologie mit Sprachverwirrung bedroht wird. Besonders aber wünschte ich meiner Arbeit dadurch einigen Werth zu verleihen, dass ich soviel als möglich bis zu den Originalquellen vorzudringen suchte, um die ersten Erfinder von Methoden und die ersten Entdecker von Lehrsätzen citiren zu können. Solche Citate sind nicht nur ein Opfer, welches die spätere Zeit den frühern Offenbarungen des Genius schuldet, sie bilden ein Stück Geschichte der Wissenschaft und laden zum Studium der hohen Werke ein, aus denen die Wissenschaft aufgebaut ist, und in denen noch immer reiche Schätze ungehoben ruhen. Freilich kann ich nicht erwarten, dass mein Suchen hierbei überall zum Finden des Richtigen geführt hat; ich hoffe aber, dass verlautete Irrthümer zu gelegentlicher Aussprache des Richtigen Veranlassung geben werden.

Nach dem Vorbemerkten ist es unnöthig hervorzuheben, was etwa von meiner Seite eigenes dem vorgefundenen Material hinzugefügt worden ist. Es bleibt mir nur übrig, die Güte meines gelehrten Freundes BORCHARDT dankbar zu rühmen, der durch mancherlei Anweisung mich bei meiner Arbeit wirksam unterstützt hat.

1857.

Zur zweiten Auflage.

Die günstige Aufnahme, welche der ersten Auflage dieses Buches zu Theil geworden ist, hat mich zu neuen Anstrengungen veranlasst, um durch Verbesserungen und Zusätze, die nöthig oder zweckmässig schienen, die fernere Brauchbarkeit meiner Arbeit zu sichern. Die Zusätze, welche insbesondere die partialen Determinanten und die linearen Substitutionen betreffen, und die neue Ausarbeitung der Paragraphen, welche das Differenzenproduct und die Resultante behandeln, waren durch die seit der ersten Auflage erschienenen mathematischen Arbeiten geboten. Auch die Darstellung der Determinanten von entgegengesetzt gleichen correspondirenden Elementen und die Auflösung der Systeme von linearen Gleichungen sind beträchtlich verändert worden. Ueberall aber war ich bedacht, den elementaren Character des Buches zu bewahren.

Wiederum habe ich den Freunden BORCHARDT und KROECKER vielfache Förderung meiner Bemühungen zu danken. Möge denn das Buch auch in dem neuen handlicheren Format, dem Format der französischen Uebersetzung von HÖTEL 1861, der mathematischen Wissenschaft nützlich dienen und sich selbst Freunde erwerben.

I n h a l t.

Theorie der Determinanten.

	Seite
§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen	1
§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen	5
§. 3. Entwicklung einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen	11
§. 4. Zerlegung einer Determinante nach partialen Determinanten. .	26
§. 5. Producte von Determinanten	37
§. 6. Determinanten von adjungirten Systemen	45
§. 7. Determinante eines Systems, dessen correspondirende Elemente a_{ik} und a_{ki} entgegengesetzt gleich sind	52

Anwendungen der Determinanten.

§. 8. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen	59
§. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen	64
§. 10. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen	70
§. 11. Resultante von zwei ganzen Functionen	92
§. 12. Die Functionaldeterminanten	119
§. 13. Lehrsätze von den homogenen Functionen	135
§. 14. Die linearen, insbesondere die orthogonalen Substitutionen .	145
§. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.	175
§. 16. Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumen	186
§. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen	204



Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Irgend zwei Elemente einer Complexion bilden eine Inversion (dérangement, variation *), wenn das erste unter den beiden Elementen höher ist als das zweite. z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Inversionen: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von CRAMER in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Inversionen vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Inversionen enthält.

2. **Lehrsatz.** Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl**).

*) CRAMER Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Die auf diesen Satz sich gründende Unterscheidung der Permutationen führt von BEZOUT her Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292, und wurde zuerst begründet von LAPLACE in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher in der hier mitgetheilten Weise von MÖLLEWEIDE demonstratio eliminationis Cramerianae. Leipzig 1811. §. 9 und von GERGONNE Ann. de Math. 4 p. 450.

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h das höhere derselben, A die Gruppe der Elemente, welche g vorangehen, B die Gruppe der Elemente, welche zwischen g und h stehen, C die Gruppe der Elemente, welche h nachfolgen; ist also die gegebene Permutation

$$A g B h C,$$

und die zu bildende

$$A h B g C,$$

so ruht die gesuchte Aenderung der Anzahl der vorhandenen Inversionen von der Stellung her, welche g und h gegen einander und gegen die in B enthaltenen Elemente einnehmen.

Die Gruppe B enthalte β Elemente, von denen β_1 höher als g , β_2 höher als h seien. Dann sind in der Complexion gBh ausser den in B vorhandenen Inversionen deren $\beta - \beta_1 + \beta_2$ anzutreffen, weil g höher ist als $\beta - \beta_1$ Elemente von B , und β_2 Elemente von B höher sind als h . Anstatt dieser Inversionen kommen in der Complexion hBg , welche durch Vertauschung von g und h abgeleitet ist, $\beta - \beta_2 + 1 + \beta_1$ Inversionen vor, weil h höher ist als $\beta - \beta_2$ Elemente von B , ferner h höher als g , und endlich noch β_1 Elemente von B höher sind als g . Die Differenz dieser Anzahlen

$$\beta - \beta_2 + 1 + \beta_1 - \beta - \beta_1 + \beta_2 = 2\beta_1 - 2\beta_2 + 1$$

ist ungerade, w. z. b. w.

3. Durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen können nach und nach alle Permutationen einer gegebenen Complexion dargestellt werden*. Die in dieser Reihe der Permutationen anzutreffenden Inversionen sind abwechselnd von gerader und ungerader Anzahl 2. Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der ersten Classe, in denen eine gerade Anzahl Inversionen vorhanden ist, als Permutationen der zweiten Classe, welche eine ungerade Anzahl Inversionen enthalten. Jene lassen sich durch eine gerade, diese durch eine ungerade Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen aus der gegebenen Complexion ableiten.

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe, wenn eine aus der andern oder beide aus einer dritten durch eine gerade

* Vergl. GALLSKAMP Elem. d. Math. 1850 §. 110 oder des Verf. Elem. d. Math. 2tes Buch §. 27

Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen sich ableiten lassen.

4. Analytischer Beweis des Lehrsatzes 2 *). Zur Unterscheidung der Permutationen bilde man bei jeder derselben die Differenzen der den Elementen zugehörigen Ordnungszahlen, indem man die Ordnungszahl jedes Elements von der jedes folgenden Elements subtrahirt. Eine Permutation enthält soviel Inversionen, als unter den erwähnten Differenzen negative vorkommen (1).

Das Product dieser Differenzen ist eine alternirende Function der Ordnungszahlen **, welche durch Vertauschung von 2 Ordnungszahlen den entgegengesetzten Werth erhält.

Beweis. Nach der Vertauschung von zwei Ordnungszahlen haben die einzelnen Differenzen in veränderter Ordnung dieselben absoluten Werthe wie vorher, also behält ihr Product seinen absoluten Werth. Versteht man unter i und k zwei bestimmte, unter r und s zwei beliebige andere Ordnungszahlen: unter

$$H(r-i)(r-k), H(r-s)$$

die Producte der Factoren, deren allgemeine Formeln

$$(r-i)(r-k), r-s$$

sind: bezeichnet man endlich einen der Werthe 1 oder -1 durch ϵ , so kann das Product der bei einer gegebenen Permutation zu bildenden Differenzen durch

$$\epsilon(k-i) H(r-i)(r-k) H(r-s)$$

dargestellt werden. Wird nun i mit k vertauscht, so bleiben

$$H(r-i)(r-k) \text{ und } H(r-s)$$

unverändert, und $k-i$ erhält den entgegengesetzten Werth. Also bekommt das Product den entgegengesetzten Werth, w. z. b. w.

Da durch Vertauschung von 2 Elementen der Permutation das in Betracht gezogene Product einen Zeichenwechsel erleidet, so ändert sich zugleich die Anzahl der negativen Differen-

*.) JACOBI *Determ.* 2 (*Crelle J.* 22 no. 41).

**.) *Fonction alternée* nach CARNOT *J. de l'éc. polyt.* Cah. 47 p. 30, *Analyse algèbr.* III, 2. — *Functio alternans* nach JACOBI *Crelle J.* 22 p. 360.

zen, mithin die Anzahl der vorhandenen Inversionen um eine ungerade Zahl, wie oben bewiesen worden.

5. Die Vertauschung der Elemente einer Complexion heisst cyclisch, wenn jedes Element durch das folgende, das letzte Element durch das erste ersetzt wird.

Durch eine cyclische Vertauschung aller Elemente erhält man aus einer gegebenen Permutation eine Permutation derselben oder nicht derselben Classe, je nachdem die Anzahl der Elemente ungerade oder gerade ist. Denn die cyclische Vertauschung von n Elementen lässt sich durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten, dritten u. s. f., also durch $n-1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erreichen.

Aus einer gegebenen Permutation kann jede andere durch cyclische Vertauschung einzelner Gruppen von Elementen abgeleitet werden. Sind z. B.

$$\overset{4}{7} \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 8 \ 1 \ 6 \ \overset{7}{9}$$

die Ordnungszahlen der Elemente in der gegebenen Permutation, und

$$2 \ 9 \ 3 \ 8 \ 7 \ 4 \ 1 \ 3 \ 6$$

die Ordnungszahlen der Elemente in der abzuleitenden Permutation, so beginne man mit dem ersten umzustellenden Element der gegebenen Permutation, und ersetze der Reihe nach 7 durch 2, 2 durch 9, 9 durch 6, 6 durch 3, 3 durch 8, endlich 8 durch das Anfangs ausgestossene Element 7. Dadurch ist eine Gruppe von Elementen abgeschlossen und deren cyclische Vertauschung vollendet. Hierauf ersetze man aus der Reihe der noch übrigen Elemente 4 durch 8, 8 durch 4, womit die cyclische Vertauschung einer zweiten Gruppe von Elementen sich schliesst. Das noch übrige Element 1 ist durch ein anderes nicht zu ersetzen. Demnach ist durch 2 partielle cyclische Vertauschungen aus der ersten Permutation die zweite abgeleitet.

Wenn man jedes der Elemente, welches bei der eben beschriebenen Ableitung einer Permutation aus einer andern durch sich selbst zu ersetzen ist, als eine besondere Gruppe mitzählt, so gilt die Regel:

Zwei Permutationen gehören in dieselbe Classe oder nicht, je nachdem die Differenz der Anzahl

ihrer Elemente und der Anzahl der Gruppen, durch deren cyclische Vertauschung die eine Permutation aus der andern abgeleitet werden kann, gerade oder ungerade ist^{*)}. Bestehen nämlich die gegebenen Permutationen aus n Elementen, lässt sich aus der ersten die zweite dadurch ableiten, dass man die Elemente in p Gruppen von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ Elementen vertheilt, und die einzelnen Gruppen durch cyclische Vertauschung umbildet, so können die vorzunehmenden cyclischen Vertauschungen durch

$$(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) + \dots$$

Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen bewirkt werden. Nun ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots = n,$$

also kann die zweite Permutation aus der ersten durch $n - p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden.

Um die Elemente der ersten Gruppe an ihre neuen Plätze zu bringen, sind nicht weniger als $\alpha_1 - 1$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen erforderlich u. s. f., daher kann eine der gegebenen Permutationen aus der andern nicht durch weniger als $n - p$ Vertauschungen von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden. Im obigen Beispiel ist $p = 3$, $n - p = 6$, folglich gehören die gegebenen Permutationen derselben Classe an.

§. 2. Determinante eines Systems von n^2 Elementen.

1. Wenn m Zeilen (Horizontalreihen, lignes) von je n Elementen, oder von der andern Seite betrachtet n Columnen (Verticalreihen) von je m Elementen zu unterscheiden sind, so werden die Elemente im Allgemeinen zweckmässig durch 2 Nummern (indices, suffixe) bezeichnet, deren erstes die Stelle der Reihe, deren zweites die Stelle des Elements in der Reihe angibt^{**)}, z. B.

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{array}$$

^{*)} CAUCHY J. de l'ec. polyt. Cah. 17 p. 42. Anal. algebr. Note 4. JACOBI Det. 3.

^{**)} Diese Bezeichnung ist zuerst von LEIBNIZ angewandt worden. S. des-

Statt $a_{i,k}$ oder a_{ik} schreibt man auch $a_i^{(k)}$ oder bloss i,k . Wenn $m=n$, so heisst die Reihe der Elemente vom ersten zum letzten

$$a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \cdots \quad a_{n,n}$$

die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente.

2. Definition. Unter der Determinante des Systems von n^2 Elementen, welche in n Reihen von je n Elementen stehen und von denen das k te der i ten Reihe durch $a_{i,k}$ bezeichnet wird, versteht man das Aggregat der Producte von je n solchen Elementen, die sämmtlich aus verschiedenen Zeilen und Columnen entnommen sind. Das Anfangsglied der Determinante ist das Product der Elemente der Diagonalreihe

$$a_{1,1} \quad a_{2,2} \quad \cdots \quad a_{n,n}.$$

Aus dem Anfangsglied werden die übrigen Glieder abgeleitet, indem man die ersten Nummern unverändert lässt und die zweiten permutirt. Die einzelnen Glieder werden positiv oder negativ genommen, je nachdem die Permutationen der Nummern, durch welche sie entstanden sind, derselben Classe angehören als die erste Complexion der Nummern, oder nicht.

Die Determinante von n^2 Elementen heisst n ten Grades, weil ihre Glieder Producte von n Elementen sind. Sie hat $1, 2, \dots, n$ Glieder, welche zur Hälfte positiv, zur andern Hälfte negativ sind §. 1, 3, unter denen aber entgegengesetzt gleiche nicht vorkommen, so lange nicht besondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen stattfinden. Man bezeichnet die Determinante nach CAYLEY und JACOBI durch Einschluss des Systems der Elemente zwischen Columnenstriche, oder durch das mit dem Doppelzeichen \pm unter ein Summenzeichen gesetzte Anfangsglied, oder nach VANDERMOERE durch Aufstellung der Reihe der ersten Nummern, welche zur Unterscheidung der Elemente dienen, über der Reihe der zweiten Nummern*):

sen Brief an L'Hôpital 1693 April 28 in Leibniz math. Schriften herausgeg. von Gerhardt II p. 239.

* CAYLEY J. de l'ecole polyt. Cah. 47 p. 52. JACOBI Det. 4 und Crelle J. 15 p. 415. VANDERMOERE Mem. sur l'élimination 1771 (Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 517). Die Determinanten sind von LEIBNIZ 1. c. erfunden worden, der mit Hilfe derselben die Resultante von n linearen Gleichungen für $n-1$ Unbekannte, sowie die Resultante von 2 algebraischen Gleichungen für eine Unbekannte darzustellen suchte. Als zweiter Erfinder der Determinanten ist CRAMER vergl. §. 4, 4 zu nennen. Die von CAYLEY

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab - a_1 b_1.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1 c_2 - ab_2 c_1 + a_1 b_2 c - a_1 b c_2 + a_2 b c_1 - a_2 b_1 c.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & ab_1 c_2 d_3 - ab_1 c_3 d_2 + ab_2 c_3 d_1 - ab_2 c_1 d_3 + ab_3 c_1 d_2 - ab_3 c_2 d_1 \\ & - a_1 b c_2 d_3 + a_1 b c_3 d_2 + a_1 b_2 c d_3 - a_1 b_2 c_3 d - a_1 b_3 c d_2 + a_1 b_3 c_2 d \\ & + a_2 b c_1 d_3 - a_2 b c_3 d_1 - a_2 b_1 c d_3 + a_2 b_1 c_3 d + a_2 b_3 c d_1 - a_2 b_3 c_1 d \\ & - a_3 b c_1 d_2 + a_3 b c_2 d_1 + a_3 b_1 c d_2 - a_3 b_1 c_2 d - a_3 b_2 c d_1 + a_3 b_2 c_1 d \end{aligned}$$

3. Die Glieder der Determinante können aus dem Anfangsglied auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Nummern permutirt, während die zweiten ihre Plätze behalten. Bei dem ersten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Zeile Elemente, welche verschiedenen Columnen angehören; bei dem zweiten Verfahren nimmt man der Reihe nach aus jeder Colonne Elemente, die verschiedenen Zeilen angehören. Irgend ein Glied $a_{1,p} a_{2,q} a_{3,r} \dots$ welches beim ersten Verfahren durch Vertauschung von $a_{1,1}$ mit $a_{1,p}$, von $a_{2,2}$ mit $a_{2,q}$, von $a_{3,3}$ mit $a_{3,r}$, . . . gebildet worden ist, ergibt sich beim zweiten Verfahren durch Vertauschung von $a_{p,p}$ mit $a_{1,p}$, von $a_{q,q}$ mit $a_{2,q}$, von $a_{r,r}$ mit $a_{3,r}$, . . . In beiden Fällen werden gleichviel Nummern mit andern vertauscht, folglich erhält das abgeleitete Glied bei dem zweiten Verfahren dasselbe Zeichen, als beim ersten. Z. B. aus

entspringt

$$a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} a_{5,5} a_{6,6}$$

$$a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} a_{4,4} a_{5,6} a_{6,5}$$

indem man die zweiten Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit 3, 2, 1, 4, 6, 5 vertauscht. Dasselbe Glied kann man aus dem Anfangsglied

eingeführte Benennung Determinante ist von den nach dem obigen Gesetz gebildeten Aggregaten hergenommen, welche Gauss "Disquis. arithm. Determinanten der quadratischen Formen" genannt hat. Später hat Cauchy

Exerc. de Math., Exerc. d'Analyse, den Namen Determinante wieder mit fonction alternée und mit dem von LAPLACE (vergl. §. 1, 2) gebrauchten Ausdruck Resultante vertauscht.

auch dadurch finden, dass man die ersten Nummern 3, 2, 1, 4, 6, 5 der Reihe nach in 1, 2, 3, 4, 5, 6 verwandelt. Bei dem einen wie bei den andern Verfahren werden 4 Nummern durch andere ersetzt und in beiden Fällen erhält das abgeleitete Glied dasselbe Zeichen.

Zwei Systeme von der Art, dass die Zeilen des einen mit den Columnen des andern übereinstimmen,

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,1} & a_{2,1} \cdots a_{n,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & a_{1,2} & a_{2,2} \cdots a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & a_{1,n} & a_{2,n} \cdots a_{n,n} \end{array}$$

haben einerlei Determinante $\sum \pm a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}$. Denn jedes Glied der einen Determinante kommt in der andern mit demselben Zeichen vor.

4. Lehrsatz. Die Determinante wechselt das Zeichen, wenn im System der Elemente eine Reihe mit einer parallelen Reihe vertauscht wird. Die Determinante verschwindet identisch, wenn die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe einzeln in derselben Ordnung gleich sind*).

Beweis. Ist R die gegebene Determinante, R' die durch Vertauschung von 2 parallelen Reihen der Elemente abgeleitete Determinante, so enthält R' dieselben Glieder als R mit entgegengesetzten Zeichen. Denn das Anfangsglied von R' entsteht aus dem Anfangsglied von R durch Vertauschung von 2 ersten oder 2 zweiten Nummern, kommt also in R mit dem entgegengesetzten Zeichen vor. Alle andern Glieder von R' , welche aus deren Anfangsglied durch eine ungerade (gerade) Anzahl Vertauschungen von jedesmal 2 Nummern hervorgehen, entspringen aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade (ungerade) Anzahl solcher Vertauschungen. Mithin kommen alle Glieder von R' in R mit den entgegengesetzten Zeichen vor, d. h. $R' = -R$.

Sind die in 2 parallelen Reihen stehenden Elemente einander der Reihe nach gleich, so wird durch Vertauschung dieser Reihen R in $-R$ verwandelt, das System der Elemente

* VANDERMONDE l. c. p. 518 u. 522. LAPLACE Hist. de l'acad. de Paris 1772, II p. 297.

bleibt aber bei dieser Vertauschung unverändert, d. h. $-R=R$, folglich $R=0$ für beliebige Werthe der Elemente. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & a_{1,3} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & a_{2,3} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & a_{n,1} & a_{n,3} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \\ \cdot & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,1} \end{vmatrix} \\ = -1^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} & a_{2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} & a_{n,1} \end{vmatrix} = -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{1,n-1} & \cdot & \cdot & a_{1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \cdot & \cdot & a_{n,1} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Ueberhaupt: wenn sowohl i, k, l, \dots als auch r, s, t, \dots gegebene Permutationen von $1, 2, \dots, n$ bedeuten, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem die gegebenen Permutationen einer Classe angehören oder nicht.

5. Lehrsatz. Wenn die in einer Reihe stehenden Elemente des Systems mit Ausnahme eines einzigen verschwinden, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf das Product des erwähnten Elements mit einer Determinante vom nächst niederen Grade *).

Beweis. Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und unter den Elementen

$$a_{i,1} \ a_{i,2} \ \cdot \ \cdot \ a_{i,n}$$

* JACOBI Det. 5.

nur $a_{i,k}$ von 0 verschieden, so mache man im gegebenen System die i te Zeile der Elemente zur ersten Zeile und die k te Colonne zur ersten Colonne, so dass R durch $(i-1) + (k-1)$ Zeichenwechsel in

$$\varepsilon R = \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{1,k} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,k} & a_{n,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

übergeht, wo $\varepsilon = -1^{i+k}$. Nach der Voraussetzung verschwinden die Glieder von εR , in welchen die erste unter den zweiten Nummern von k verschieden ist. Daher reducirt sich εR auf die Glieder, welche aus dem Anfangsgliede

$$a_{i,k} a_{1,1} \cdots a_{n,n}$$

durch Permutation der zweiten Nummern $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ nach Ausschliessung von k hervorgehen, d. i. auf die Glieder einer Determinante $(n-1)$ ten Grades (2), welchen der Factor $a_{i,k}$ zugesetzt ist, also

$$\varepsilon R = a_{i,k} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i-1,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n,1} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

worn ε die angegebene Bedeutung hat.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix} = -d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & b_1 & b_2 & b_3 \\ c & c_1 & c_2 & c_3 \\ d & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

6. Umgekehrt folgt, dass jede Determinante als Determinante von einem höhern Grade dargestellt werden kann, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{n+2,n+1} & \dots & a_{n+2,n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die Elemente

$$\begin{aligned} & a_{n+1,1} \dots a_{n+1,n} \\ & a_{n+2,1} \dots a_{n+2,n} \quad a_{n+2,n+1} \dots \end{aligned}$$

welche in der Entwicklung der transformirten Determinante nicht angetroffen werden, können jeden beliebigen Werth annehmen, also auch verschwinden.

7. Wenn alle Elemente verschwinden, welche auf einer Seite der Diagonalreihe stehen, so reducirt sich die Determinante des gegebenen Systems auf ihr Anfangsglied.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \text{ u. s. f. } \S$$

$$= a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}.$$

§. 3. Entwicklung einer Determinante nach den in einer Reihe stehenden Elementen.

1. Bestimmung des Coefficienten $\alpha_{i,k}$, welchen das Element $a_{i,k}$ in der Determinante $R = \sum \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ hat. Um die Glieder von R , in denen $a_{i,k}$ vorkommt, übrig zu behalten, setze man die Elemente einer Reihe, welche das Element $a_{i,k}$ enthält, gleich 0 mit Ausnahme von $a_{i,k}$. Setzt man dann 1 an die Stelle von $a_{i,k}$, so findet man den gesuchten Coefficienten

$$\alpha_{i,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

welcher sich als Determinante $(n-1)$ ten Grades darstellen lässt (§. 2, 3). Wenn man die i te Zeile zur ersten Zeile und die k te Colonne zur ersten Colonne macht, so finden $(i-1) + (k-1)$ Zeichenwechsel in $\alpha_{i,k}$ statt (§. 2, 4), folglich ist

$$\alpha_{i,k} = -1^{(i+k)} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= -1^{(i+k)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Wenn insbesondere jedes Element $a_{k,i}$ verschwindet, für welches $k \geq i$ ist, so verschwindet $\alpha_{i,k}$. Denn die Elemente der Diagonale verschwinden zum Theil, während alle einerseits der Diagonale stehenden Elemente verschwinden.

Durch ein analoges Verfahren leitet man aus R den Coefficienten ab, welchen das Product $a_{i,k} a_{r,s}$ in R hat, indem man 1 an die Stelle von $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ setzt und 0 an die Stelle der übrigen Elemente, welche die in $a_{i,k}$ und $a_{r,s}$ sich schneidenden Reihen des Systems enthalten. Dieser Coefficient reducirt sich auf eine Determinante $(n-2)$ ten Grades u. s. f.

2. Bestimmung von $\alpha_{i,k}$ durch cyclische Vertauschung. Um aus R eine dem absoluten Werth nach gleiche Determinante, deren Anfangselement $a_{i,k}$ ist, durch cyclische Vertauschung abzuleiten, hat man nach einander $i-1$ cyclische Vertauschungen der Zeilen und $k-1$ cyclische Vertauschungen der Colonnen vorzunehmen, wodurch

$$i-1+k-1 = n-1$$

Zeichenwechsel eintreten (§. 1, 3). Daher ist (1)

$$\alpha_{i,k} = -1^{(n-1)(i+k)} \begin{vmatrix} a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} \end{vmatrix}.$$

Bei Determinanten ungeraden Grades können die Coefficienten $\alpha_{i,k}$ aus $\alpha_{1,1}$ durch cyclische Vertauschung ohne Zeichen-

wechsel abgeleitet werden. Zu recurrenter Bildung der Determinanten hat man demnach

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b & c \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 & d_3 \\ b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

3. Lehrsatz. Wenn $a_{i,k}$ den Coefficienten des Elements $a_{i,k}$ in der Determinante R bedeutet, mithin $a_{i,k}$ $a_{i,k}$ das Aggregat der Glieder von R , welche das Element $a_{i,k}$ enthalten, so haben die Summen

$$a_{i,1} a_{k,1} + a_{i,2} a_{k,2} + \dots + a_{i,n} a_{k,n},$$

$$a_{1,i} a_{1,k} + a_{2,i} a_{2,k} + \dots + a_{n,i} a_{n,k}$$

den Werth R oder 0, je nachdem die Nummern i und k gleich oder ungleich sind*.

Beweis. Jedes Glied von R enthält je eines der Elemente

$$a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n},$$

welche die i te Zeile ausmachen. Nach Voraussetzung ist $a_{i,i}$ $a_{i,i}$ das Aggregat der Glieder von R , worin das Element $a_{i,i}$ vorkommt, u. s. w. Daher

$$R = a_{i,1} a_{i,1} + a_{i,2} a_{i,2} + \dots + a_{i,n} a_{i,n}.$$

Auf demselben Wege findet man die Identität

$$R = a_{1,i} a_{1,i} + a_{2,i} a_{2,i} + \dots + a_{n,i} a_{n,i}.$$

Setzt man hierin

$$a_{i,1} = a_{k,1}, a_{i,2} = a_{k,2}, \dots \text{ oder } a_{1,i} = a_{1,k}, a_{2,i} = a_{2,k}, \dots$$

so erhält man Summen, welche den Determinanten von Systemen gleichelten, worin die Elemente einer Reihe den Elementen einer parallelen Reihe einzeln gleich sind. Diese Determinanten verschwinden identisch (§. 2, 4).

4. Um eine Determinante mit einem Factor zu multipliciren, hat man alle Elemente einer Reihe mit demselben zu multipliciren. Den gemeinschaftlichen Factor aller Elemente einer Reihe kann man vor die Determinante setzen. Z. B.

* J. CRAMER I. c. CAUCHY I. c. p. 66. JACOBI Det. 6. Die aus diesem Satze für $n=3$ entspringenden Identitäten finden sich bei LAGRANGE sur les pyr. 7. Mem. de l'acad. de Berlin 1773.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & b & c \\ pa_1 & b_1 & c_1 \\ pa_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa & pb & pc \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dies ergibt sich, wenn die Determinante unter der Form $aa + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ oder $aa + b\beta + c\gamma$ vorgestellt wird. Ferner ist

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -a & b \\ -a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_1 & c_1 \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b_2 & c_2 \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_1 \end{vmatrix} &= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c_2 \end{vmatrix} &= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Wenn die Elemente einer Columnne, Zeile, des Systems sich zu einander verhalten, wie die Elemente einer andern Columnne, Zeile, so verschwindet die Determinante identisch.

5. Sind alle Elemente einer Reihe Aggregate von m Gliedern, so lässt sich die Determinante in das Aggregat von m Determinanten auflösen. Wenn

$$a_{i,1} = p_1 + q_1 + r_1 + \dots$$

$$a_{i,2} = p_2 + q_2 + r_2 + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

so ist

$$\begin{aligned} R &= a_{i,1} a_{i,1} + a_{i,2} a_{i,2} + \dots + a_{i,n} a_{i,n} \\ &= p_1 a_{i,1} + p_2 a_{i,2} + \dots + p_n a_{i,n} \\ &\quad + q_1 a_{i,1} + q_2 a_{i,2} + \dots + q_n a_{i,n} \\ &\quad + r_1 a_{i,1} + r_2 a_{i,2} + \dots + r_n a_{i,n} \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die einzelnen Determinanten, in welche R sich zerlegen lässt, entspringen aus R , indem an die Stelle der Elemente

$$a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \dots \quad a_{i,n}$$

die Glieder derselben

$$p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n$$

$$q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n$$

$$r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_n$$

u. s. w. der Reihe nach gesetzt werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a + a' & a_1 & a_2 \\ b + b' & b_1 & b_2 \\ c + c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & a_1 & a_2 \\ b' & b_1 & b_2 \\ c' & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

6. Der Werth einer Determinante wird nicht verändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Factor multiplicirten Elemente einer parallelen Reihe addirt *)

$$\begin{vmatrix} a+b p & b & c \\ a_1+b_1 p & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 p & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} b & b & c \\ b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(vergl. 3. u. 2.), wovon die zweite Determinante identisch verschwindet (§. 2, 4).

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b \\ x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-a & b-b \\ 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad \text{vergl. §. 2, 6.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16.$$

Multiplicirt man in der Determinante

$$S = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \\ b_{0,1} & b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0,n} & b_{1,n} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

die $(n+1)$ te Colonne mit b_{n-1} und subtrahirt dann von dieser Colonne die mit b_n multiplicirte vorhergehende Colonne; transformirt man auf dieselbe Weise die n te, $(n-1)$ te, ... Colonne, so findet man

$$S b_0 b_1 \dots b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 & b_0 b_1 - b_1 b_0 & \dots & b_{n-1} b_n - b_n b_{n-1} \\ b_{0,1} & b_0 b_{1,1} - b_1 b_{0,1} & \dots & b_{n-1} b_{n,1} - b_n b_{n-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{0,n} & b_0 b_{1,n} - b_1 b_{0,n} & \dots & b_{n-1} b_{n,n} - b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

und daher

$$S b_1 \dots b_{n-1} = \begin{vmatrix} b_0 b_{1,1} - b_1 b_{0,1} & \dots & b_{n-1} b_{n,1} - b_n b_{n-1,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_0 b_{1,n} - b_1 b_{0,n} & \dots & b_{n-1} b_{n,n} - b_n b_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

ist durch $a+b+c+d$, $a-b-c+d$, $a-b+c-d$, $a+b-c-d$ theilbar, also auch durch das Product dieser Factoren. Der Quotient ist 1.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} ax + by + cz & b & c \\ a'x + b'y + c'z & b' & c' \\ a''x + b''y + c''z & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

verschwindet, wenn x, y, z nicht verschwindende Werthe haben, für welche zugleich

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \\ a''x + b''y + c''z &= 0. \end{aligned}$$

7. Wenn man

$$\binom{b}{k} = \frac{b \cdot b-1 \cdot \dots \cdot b-k+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

setzt, so ist

$$R = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \dots & \binom{c+2m-1}{m} \\ \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & \dots & \binom{c+2m}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & \dots & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix} = 1.$$

Denn zufolge der Identität

$$\binom{c+n}{k} - \binom{c+n-1}{k} = \binom{c+n-1}{k-1}$$

erhalt man nach Verminderung jeder Zeile um die vorhergehende

$$R = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \dots & \binom{c+2m-1}{m} \\ 0 & 1 & \binom{c+m+1}{1} & \dots & \binom{c+2m-1}{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \binom{c+2m}{1} & \dots & \binom{c+3m-2}{m-1} \end{vmatrix}$$

Vollzieht man dieselbe Operation an den letzten $m-1$, $m-2$, .. Zeilen, so werden alle Elemente der Diagonale 1, während alle Elemente einerseits der Diagonale verschwinden. Daher ist $R=1$, unabhängig von c und m .

8. Multipliziert man in der Determinante (die leeren Stellen des Systems enthalten verschwindende Elemente,

$$B = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & & & \\ a_1 & -b_0 & b_2 & & \\ a_2 & & -b_1 & b_3 & \\ . & . & . & . & . \\ a_{n-1} & & & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & & & & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

die Zeilen der Reihe nach mit b_0, b_1, \dots, b_n , und addirt dann zu jeder Zeile die folgenden Zeilen, so erhält man eine Determinante, die sich auf ihr Anfangsglied reducirt, nämlich

$$B b_0 b_1 \dots b_n = (-1)^n (a_0 b_0 + \dots + a_n b_n) b_0 b_1 \dots b_{n-1} b_n.$$

Daher ist

$$B = -1^n (a_0 b_0 + \dots + a_n b_n) b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n.$$

9. Wenn die Elemente $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$ gleich sind, und jedes in der Diagonale stehende Element $a_{i,i}$ der Summe der mit ihm in einer Reihe stehenden Elemente entgegengesetzt gleich ist, so verschwindet die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$, und alle Elemente haben in der Determinante gleiche Coefficienten *).

Beweis. Alle Elemente einer Zeile von

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & . & . & a_{0,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n,0} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

verschwinden zufolge der Voraussetzung, wenn man zu derselben Zeile alle übrigen Zeilen des Systems addirt. Also verschwindet die Determinante.

Wenn man in dem Coefficienten von $a_{0,0}$

$$a_{0,0} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

*) HERMITE LIouv. J. 44 p. 26.

**) BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1859 p. 380 und Crelle J. 57 p. 444.

zur i ten Zeile die übrigen Zeilen addirt, so kommen in die i te Zeile die Elemente

$$-a_{i,1} \quad -a_{i,2} \quad \dots \quad -a_{i,n}.$$

Addirt man nun zur k ten Colonne die übrigen Colonnen, so erhält man in der k ten Colonne die Elemente

$$-a_{1,k} \quad \dots \quad -a_{i-1,k} \quad a_{i,0} \quad -a_{i+1,k} \quad \dots \quad -a_{n,k}.$$

Indem man noch die transformirten Reihen voranstellt, findet man

$$a_{i,0} = -1 \cdot i + k \begin{vmatrix} a_{i,0} & \dots & a_{i,k-1} & a_{i,k+1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,0} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,0} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,0} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{i,k}.$$

10. Die aus $2n-1$ Grössen gebildete Determinante n ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

bleibt unverändert, wenn an die Stelle der Grössen die Anfangsglieder ihrer Differenzen-Reihen gesetzt werden *).

Beweis. Man bilde aus der Reihe der gegebenen Grössen die Reihen ihrer ersten, zweiten, . . . Differenzen, indem man jedes Glied von dem folgenden subtrahirt:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ -I_1 & -I_{11} & -I_{12} & -I_{13} & \dots & \\ & -I_2 & -I_{21} & -I_{22} & \dots & \\ & & -I_3 & -I_{31} & \dots & \\ & & & -I_4 & \dots & \\ & & & & \dots & \end{array}$$

Subtrahirt man nun in P von der n ten, $(n-1)$ ten, . . . Colonne die jedesmal vorhergehende, so erhält man

* H. HASKEL über eine besondre Classe der symmetrischen Determinanten (Göttingen 1861). Das System $a_{1,1} \dots a_{n,n}$ heisst symmetrisch, wenn $a_{i,k} = a_{k,i}$. Das obige besondre System ist von SYLVESTER persymmetrisch, von HASKEL orthosymmetrisch genannt worden.

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & -J_1 & & & -J_{1,n-2} \\ a_1 & -J_{11} & & & -J_{1,n-3} \\ . & . & & & . \\ a_{n-1} & -J_{1,n-1} & & & -J_{1,2n-3} \end{vmatrix}$$

Indem man dieselbe Operation wiederholt an den neuen Columnen vollzieht, findet man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & -J_1 & -J_2 & & -J_{n-1} \\ a_1 & -J_{11} & -J_{21} & & -J_{n-1,1} \\ . & . & . & & . \\ a_{n-1} & -J_{1,n-1} & -J_{2,n-1} & & -J_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Führt man die angegebene Reihe von Operationen auch an den Zeilen der zuletzt gefundenen Determinante aus, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & -J_1 & -J_2 & & -J_{n-1} \\ -J_1 & -J_2 & -J_3 & & -J_n \\ . & . & . & & . \\ -J_{n-1} & -J_n & -J_{n+1} & & -J_{2n-2} \end{vmatrix}$$

was zu beweisen war.

Ist insbesondere a_k eine ganze Function m ten Grades von k , so bilden wie bekannt die Grössen a_0, a_1, a_2, \dots eine arithmetische Progression m ter Ordnung, und die Glieder ihrer m ten Differenzen-Reihe haben den gemeinschaftlichen Werth $J_m = 1 \cdot 2 \dots m$, weshalb J_{m+1}, J_{m+2}, \dots verschwinden. Wenn nun $n-1 = m$, so wird (§. 2, 7,

$$P = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} 1 \cdot 2 \dots m^{m+1}$$

während P verschwindet, wenn $n-1 < m$. In beiden Fällen können statt der Grössen a_0, a_1, a_2, \dots auch die Grössen $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$ gesetzt werden.

Wenn z. B. c eine beliebige Zahl ist und

$$a_k = \binom{c+k+m}{m} = \frac{c+k+m}{1} \frac{c+k+m-1}{2} \dots \frac{c+k+1}{m},$$

so hat man

$$P = \begin{vmatrix} \binom{c+m}{m} & \binom{c+m+1}{m} & \dots & \binom{c+2m}{m} \\ \binom{c+m+1}{m} & . & & . \\ . & . & & . \\ \binom{c+2m}{m} & . & & \binom{c+3m}{m} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

Weitere Anwendungen enthält die angeführte Abhandlung.

11. Wenn man aus $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$ und $S = \Sigma \pm b_{11} \dots b_{nn}$ neue Determinanten ableitet, nämlich t_{ik} aus R dadurch, dass man die i te Colonne von R durch die k te von S ersetzt, und u_{ik} aus S dadurch, dass man die i te Colonne von S durch die k te Colonne von R ersetzt, so hat die Summe

$$t_{i1} u_{1k} + t_{i2} u_{2k} + \dots + t_{in} u_{nk}$$

den Werth RS oder 0 , je nachdem $i = k$ oder nicht*.

Beweis. Bezeichnet man die Coefficienten der Elemente $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ in R und S durch $\alpha_{i,k}$ und $\beta_{i,k}$, so hat man (3)

$$t_{i,1} = b_{1,1} \alpha_{1,i} + \dots + b_{n,1} \alpha_{n,i}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$t_{i,n} = b_{1,n} \alpha_{1,i} + \dots + b_{n,n} \alpha_{n,i}$$

folglich

$$t_{i,1} \beta_{1,i} + \dots + t_{i,n} \beta_{n,i} = \alpha_{1,i} S$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$t_{i,1} \beta_{n,i} + \dots + t_{i,n} \beta_{n,i} = \alpha_{n,i} S$$

folglich

$$t_{i,1} \alpha_{1,k} \beta_{1,i} + \dots + \alpha_{n,k} \beta_{n,i} + \dots + t_{i,n} (\alpha_{1,k} \beta_{1,i} + \dots + \alpha_{n,k} \beta_{n,i}) \\ = \alpha_{1,k} \alpha_{1,i} + \dots + \alpha_{n,k} \alpha_{n,i} S.$$

Nun ist $\alpha_{1,k} \beta_{1,i} + \dots + \alpha_{n,k} \beta_{n,i} = u_{1,k}$ u. s. w.

Beispiele. Schreibt man zur Abkürzung

$$(ab) \qquad abc) \qquad abcd \qquad \dots$$

statt

$$\left. \begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \end{array} \right| \qquad \left. \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right| \qquad \left. \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right| \qquad \dots$$

so erhält man

$$(bc \ ad + ca \ bd + (ab \ cd) = 0$$

$$bad \ aef - cda \ bef + dab \ cef - (abc \ def) = 0$$

$$bade, afgh + cdea \ bfg + deab \ c fgh$$

$$+ eabc, dfgh + abcd \ e fgh = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

* Dieser Satz ist in einem allgemeinen Satz enthalten, der von SYLVESTER S. unten §. 4, 10 herrührt. Den hier mitgetheilten Beweis hat Brioschi Det. 39 gegeben. Die einfachsten Fälle des Satzes kommen bei Bézout equat. algebr. 1779 §. 220 vor. Die entsprechenden geometrischen Sätze vergl. unten §. 15 hat MOYER 1809 abgeleitet Journ. de l'ec. polyt. Cah. 15 p. 68 und auf andern Wege MOYER's baryc. Calc. §. 166 u. 171.

12. Bestimmung von α_{ik} durch Differentiation. Wenn die Elemente des Systems von einander unabhängig sind, so kommt bei der Differentiation von $R + 1$ in Bezug auf a_{ik} nur das Aggregat $a_{ik} \alpha_{ik}$ in Betracht. Nun ist α_{ik} von a_{ik} unabhängig, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}^*).$$

Der Coefficient von a_{ik} in R kann demnach durch den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden.

Der Coefficient von $a_{ik} a_{rs}$ in R erscheint als Coefficient von a_{rs} in α_{ik} und kann demnach durch Differentiation von α_{ik} nach a_{rs} gefunden, mithin durch

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}} \quad **)$$

ausgedrückt werden. Aus diesem Coefficienten lässt sich der Coefficient von $a_{rk} a_{is}$ in R ableiten, wenn man i und r , d. h. die i te Zeile des gegebenen Systems mit der r ten vertauscht. Dabei erleidet R einen Zeichenwechsel, also ist der gesuchte Coefficient

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{rk} \partial a_{is}} = - \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ik} \partial a_{rs}}.$$

Analog lässt sich der Coefficient von $a_{ik} a_{rs} a_{ur}$ in R bestimmen. Man findet dabei Relationen zwischen den dritten partialen Differentialquotienten von R u. s. w.

13. Sind die Elemente des Systems, welche dieselben Numern in umgekehrter Ordnung haben, z. B. a_{ik} und a_{ki} , von einander abhängig, so sind auch die Determinanten m ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{i,r} & a_{i,s} & a_{i,t} & \cdot \\ a_{k,r} & a_{k,s} & a_{k,t} & \cdot \\ a_{l,r} & a_{l,s} & a_{l,t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \cdot \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \cdot \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

deren eine aus der andern dadurch entsteht, dass die Reihe der ersten Numern mit der Reihe der zweiten Numern vertauscht wird, von einander abhängig.

* JACOBI Det. 6.

** JACOBI Det. 10.

I. Wenn insbesondere $a_{ki} = \varepsilon a_{ik}$, wobei ε entweder 1 oder -1 bedeutet, und in dem zweiten Falle die Elemente a_{11}, a_{22}, \dots als verschwindend vorausgesetzt werden, so erhält man durch Multiplication jeder Colonne mit ε

$$\varepsilon^m P = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{s,i} & a_{t,i} & \dots \\ a_{r,k} & a_{s,k} & a_{t,k} & \dots \\ a_{r,l} & a_{s,l} & a_{t,l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{r,i} & a_{r,k} & a_{r,l} & \dots \\ a_{s,i} & a_{s,k} & a_{s,l} & \dots \\ a_{t,i} & a_{t,k} & a_{t,l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = Q.$$

Ist die Reihe r, s, t, \dots eine Permutation der Reihe i, k, l, \dots und $\varepsilon = -1$, m ungerade, so ist Q nicht nur $= P$ §. 2, 4, sondern auch $= -P$, d. h. die Determinante verschwindet identisch.

II. Wenn die Elemente der Diagonale a_{11}, a_{22}, \dots real, die andern aber complex und paarweise a_{ik} und a_{ki} conjugirt sind, so hat die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$ einen realen Werth*, während die Elemente a_{ik} und a_{ki} in R conjugirte complexe Coefficienten α_{ik} und α_{ki} besitzen.

Vertauscht man nämlich in den complexen Elementen $\sqrt{-1}$ mit -1 , so geht a_{ik} in a_{ki} über, und die Zeilen des gegebenen Systems werden die Columnen des neuen Systems. Demnach bleibt die Determinante R unverändert §. 2, 3, also kann sie nicht complex sein. Dagegen geht α_{ik} in α_{ki} über, so dass beide conjugirt complexe Werthe haben.

14. Wenn R wie oben die Determinante $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$ und α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}, \quad \alpha_{ii} = \frac{\partial R}{\partial a_{ii}}.$$

Dagegen ist unter der Voraussetzung $a_{ki} = -a_{ik}$ und $\alpha_{ii} = 0$

$$R = -1^{n-1} R, \quad \alpha_{ik} = -1^{n-1} \alpha_{ki}$$

d. h. bei geradem n

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}, \quad \alpha_{ii} = 0$$

und bei ungeradem n

$$R = 0 \dots, \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ki}.$$

* HERMITE Comptes rendus 44 p. 181. Crelle J. 52 p. 30.

** JACOBI Crelle J. 12 p. 20.

*** JACOBI Crelle J. 2 p. 354.

Beweis. Die über R und α_{ik} aufgestellten Behauptungen folgen aus den im vorigen Artikel gefundenen Eigenschaften von P und Q (vergl. I.). Ferner ist wegen des Zusammenhangs zwischen den correspondirenden Elementen a_{ik} und a_{ki} [12]

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \alpha_{ki} \frac{\partial a_{ki}}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} + \varepsilon \alpha_{ki}.$$

Nach der ersten Voraussetzung ist aber $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, folglich

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = 2\alpha_{ik}.$$

Gemäss der zweiten Voraussetzung und bei geradem n ist $-\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$, mithin

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} &= \alpha_{ik} - \alpha_{ki} \\ \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} &= 2\alpha_{ik}. \end{aligned}$$

Bei ungeradem n verschwindet $\frac{\partial R}{\partial a_{ik}}$ identisch, wie R selbst, und die Gleichung

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik} - \alpha_{ki}$$

gibt das bereits erhaltene Resultat $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

15. Differential einer Determinante. Wenn alle Elemente des Systems als von einander unabhängige Variable betrachtet werden, so ist vermöge der Gleichung [12]

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ik}} = \alpha_{ik}$$

das vollständige Differential

$$dR = \sum_{i,k} \alpha_{ik} da_{ik}^*.$$

eine Summe, deren Glieder man aus $\alpha_{ik} da_{ik}$ ableitet, indem man für i und k alle Nummern von 1 bis n setzt.

Beispiele.

$$R = \sum \pm a_{11} \dots a_{44} = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ b & 2c & d & 0 \\ 0 & b & 2c & d \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a_{11}} \frac{\partial a_{11}}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial a_{22}} \frac{\partial a_{22}}{\partial a} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial b} &= \frac{\partial R}{\partial a_{12}} \frac{\partial a_{12}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{23}} \frac{\partial a_{23}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{31}} \frac{\partial a_{31}}{\partial b} + \frac{\partial R}{\partial a_{42}} \frac{\partial a_{42}}{\partial b} \\ &= 2\alpha_{12} + 2\alpha_{23} + \alpha_{31} + \alpha_{42} \end{aligned}$$

*) JACOBI Det. 6.

$$\frac{\partial R}{\partial c} = a_{11} + a_{21} + 2a_{32} + 2a_{43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial d} = a_{33} + a_{44}.$$

Sind y_1, y_2, \dots, y_n Functionen von x , bezeichnet man den k ten Differentialquotienten von y_i durch y_{ik} , bildet die Determinante n ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & \dots & y_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & \dots & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

und bezeichnet mit η_{ik} den Coefficienten von y_{ik} in R_n , so hat man nach der aufgestellten Formel

$$\frac{dR}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{ik} \frac{dy_{ik}}{dx} = \sum_{i,k} \eta_{ik} y_{i,k+1}.$$

Die Summe

$$\eta_{1,k} y_{1,k+1} + \eta_{2,k} y_{2,k+1} + \dots + \eta_{n,k} y_{n,k+1}$$

verschwindet für jedes k unter $n-1$, folglich bleibt

$$\frac{dR}{dx} = \sum_i \eta_{i,n-1} y_{i,n}.$$

Sind t_1, t_2, \dots, t_n von einander unabhängig, und

$$R_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

so findet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_n}{\partial t_1} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \dots & (n-1)t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ \frac{\partial^{n-1} R_n}{\partial t_1 \dots \partial t_{n-1}} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2t_1 & \dots & (n-1)t_1^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2t_{n-1} & \dots & (n-1)t_{n-1}^{n-2} \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= -1^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-1) R_{n-1}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$f t_1^{-2} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{R_n}{f t_1} \right) = \begin{vmatrix} -f' t_1 & f t_1 - t_1 f' t_1 & \dots & n-1 t_1^{n-2} f t_1 - t_1^{n-1} f' t_1 \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f t_1^{-2} f t_2^{-2} \dots f t_n^{-2}}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \left(\frac{R_n}{f t_1 \dots f t_n} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} -f' t_1 & f t_1 - t_1 f' t_1 & \dots & n-1 t_1^{n-2} f t_1 - t_1^{n-1} f' t_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f' t_n & f t_n - t_n f' t_n & \dots & n-1 t_n^{n-2} f t_n - t_n^{n-1} f' t_n \end{vmatrix}$$

16. Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ durch R , und den Coefficienten des Elements $a_{i,k}$ in R durch $\alpha_{i,k}$, so giebt die Entwicklung der Determinante $n+1$ ten Grades

$$S = \Sigma \pm a_{0,0} a_{1,1} \dots a_{n,n}$$

nach den Elementen, welche mit $a_{0,0}$ in derselben Zeile und Colonne stehen:

$$S = a_{0,0} R - \sum_{i,k} a_{i,0} a_{0,k} \alpha_{i,k}.$$

Die Glieder der Summe werden dargestellt, indem man für i und k alle Nummern bis n ausser 0 setzt.

Beweis. Die Glieder der Determinante S enthalten entweder das Element $a_{0,0}$ oder das Product eines der Elemente $a_{1,0}, a_{2,0}, \dots$ mit einem der Elemente $a_{0,1}, a_{0,2}, \dots$ z. B. $a_{i,0} a_{0,k}$. Das Aggregat der Glieder von S , in denen $a_{0,0}$ vorkommt, ist $a_{0,0} R$. Der Coefficient des Products $a_{i,0} a_{0,k}$ in S ist dem Coefficienten von $a_{i,0} a_{i,k}$ in S entgegengesetzt gleich (2), mithin dem Coefficienten von $a_{i,k}$ in R entgegengesetzt gleich. Daher ist $-\alpha_{i,k}$ der Coefficient von $a_{i,0} a_{0,k}$ in S .

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b' & 1 & 0 & 0 \\ c' & 0 & 1 & 0 \\ d' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - bb' - cc' - dd'.$$

17. Ist das System der Elemente symmetrisch, so dass $a_{k,i} = a_{i,k}$ und folglich $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ (13), so sind die Glieder der

Summe 16), welche aus zwei verschiedenen Werthen von i und k entspringen, einander gleich.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} = a a_1 a_2 - a b_{12}^2 - a_1 b_{02}^2 - a_2 b_{01}^2 + 2 b_{01} b_{02} b_{12} \\
 = a \begin{vmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{01} & a_1 & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & a_2 \end{vmatrix} \\
 = a a_1 a_2 a - a_1 b_{23}^2 - a_2 b_{13}^2 - a_3 b_{12}^2 + 2 b_{12} b_{13} b_{23} \\
 - b_{01}^2 a_2 a_3 - b_{23}^2 - b_{02}^2 a_1 a_3 - b_{13}^2 - b_{03}^2 a_1 a_2 - b_{12}^2 \\
 + 2 b_{01} b_{02} a_1 b_{12} - b_{13} b_{23} + 2 b_{01} b_{03} a_2 b_{13} - b_{12} b_{23} + 2 b_{02} b_{03} a_1 b_{23} - b_{12} b_{13} .$$

Insbesondere ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc \\
 \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c_1 & b_1 \\ b & c_1 & 0 & a_1 \\ c & b_1 & a_1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 - 2aa_1bb_1 - 2aa_1cc_1 - 2bb_1cc_1 \\
 = 4aa_1 + bb_1 - cc_1^2 - 4aa_1bb_1 \\
 = -1aa_1 + 1bb_1 + 1cc_1 - 1aa_1 + 1bb_1 + 1cc_1 \\
 \times 1aa_1 - 1bb_1 + 1cc_1 - 1aa_1 + 1bb_1 - 1cc_1 \\
 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \\
 = a^2 + b^2 + c^2 - 4ab \\
 = -1a + 1b + 1c - 1a + 1b + 1c - 1a - 1b + 1c - 1a + 1b - 1c^2 .$$

§. 4. Zerlegung einer Determinante nach partialen Determinanten.

1. Wenn man aus dem gegebenen System von n^2 Elementen

$$\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

beliebig m Zeilen auswählt, deren Nummern durch f, g, h, \dots bezeichnet werden, und von diesen Zeilen m Columnen behält, deren Nummern r, s, t, \dots sind, so heisst die Determinante m ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} a_{fr} & a_{fs} & a_{ft} & \dots \\ a_{gr} & a_{gs} & a_{gt} & \dots \\ a_{hr} & a_{hs} & a_{ht} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante * des gegebenen Systems.

Die partielle Determinante P multiplicirt mit einem bestimmten Coefficienten Q ist das Aggregat der Glieder von

$$R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$$

welche dadurch entstehen, dass man sowohl die m Nummern f, g, h, \dots als auch die übrigen $n-m$ Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ unter einander auf alle Arten vertauscht, oder dadurch, dass man nur die Nummern r, s, t, \dots und die übrigen vertauscht. Daher ist der Coefficient Q , welchen P in R hat, eine partielle Determinante $n-m$ ten Grades, welche sich wie folgt angeben lässt. Sind

$$\begin{matrix} f, g, h, \dots, q, z, \psi, \dots \\ r, s, t, \dots, \varrho, \sigma, \tau, \dots \end{matrix}$$

Permutationen von $1, 2, \dots, n$, so ist

$$\Sigma \pm a_{fr} a_{gs} a_{ht} \dots a_{fq} a_{z\varrho} a_{\psi\sigma} \dots = \varepsilon R,$$

wobei ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Permutationen in eine Classe gehören oder nicht §. 2. 4. Nun hat P in εR denselben Coefficienten, als das Product $a_{fr} a_{gs} a_{ht} \dots$ folglich ist

$$\varepsilon Q = \Sigma \pm a_{fq} a_{z\varrho} a_{\psi\sigma} \dots$$

Die Determinante R geht in Q über, wenn die Elemente $a_{fr}, a_{gs}, a_{ht}, \dots$ den Werth 1 erhalten, während die übrigen Elemente, welche mit den genannten je in einer Zeile oder in einer Colonne stehn, verschwinden **.

* Jacobi Crelle J. 27 p. 206. 30 p. 436. Von gleicher Bedeutung ist Dét. d'un système dérivé bei Cauchy J. de l'ec. polyt. Cah. 17 p. 96, Minor determinant bei den englischen, Unterdeterminante Subdeterminante bei den deutschen Mathematikern.

** Daher heissen die partialen Determinanten P und Q complementär bei Cauchy l. c.

Unter der Voraussetzung von einander unabhängiger Elemente hat man §. 3. 12

$$Q = \frac{\delta^m R}{\delta a_{ff} \delta a_{gg} \delta a_{hh} \dots}$$

2. Bildet man die Coefficienten, welche a_{ff} , $a_{ff} a_{gg}$, $a_{ff} a_{gg} a_{hh}$, ... in der Determinante R haben, und bezeichnet man die Werthe, welche R und diese partialen Determinanten annehmen, wenn alle Elemente der Diagonale a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} durch Nullen ersetzt werden, durch D , D_f , D_{fg} , D_{fgh} , ..., so hat man

$$R = D + \sum a_{ff} D_f + \sum a_{ff} a_{gg} D_{fg} + \dots + a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Die Glieder der einzelnen Summen werden erhalten, wenn man für f alle Nummern $1, 2, \dots, n$, für fg alle Binionen derselben, für fgh alle Ternionen derselben u. s. w. setzt.

Beweis. Die Glieder von R , welche keines der Elemente a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} enthalten, stimmen mit den Gliedern von D überein. Aus dem Aggregat der Glieder von R , welche das Product von m bestimmten Elementen der Diagonale $a_{ff} a_{gg} a_{hh}$, ... enthalten, entspringt das Aggregat der Glieder von R , welche ausser jenen Elementen kein andres Element der Diagonale enthalten, indem man die übrigen Elemente der Diagonale durch Nullen ersetzt. Also ist dieses Aggregat von

$$a_{ff} a_{gg} a_{hh} \dots D_{fgh} \dots$$

nicht verschieden. Die Summe dieser auf alle möglichen Arten gebildeten Aggregate umfasst alle Glieder der Determinante R .

3. Die Entwicklung der Determinante

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + z & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + z \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von z giebt

$$R_n + z \sum R_{n-1} + z^2 \sum R_{n-2} + \dots + z^{n-1} \sum R_1 + z^n,$$

wo

$$R_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \dots \\ a_{ki} & a_{kk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante m ten Grades ist, deren Diagonale aus Elementen der Diagonale von R_n besteht, und ΣR_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus R_m entspringen, indem für i, k, \dots alle verschiedenen Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ gesetzt werden*.

Beweis. Die Uebereinstimmung des ersten Gliedes R_n mit $f(0)$ und die Richtigkeit des letzten Gliedes z^n ist unmittelbar wahrzunehmen. Die Glieder der Entwicklung, welche z^m enthalten, entspringen aus den Gliedern der Determinante $f(z)$, worin irgend welche m Elemente der Diagonale vorkommen. Bedeutet nun i, k, \dots irgend eine aufsteigend geordnete Combination von m Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ und r, s, \dots die Reihe der übrigen Nummern, so ist (§. 2, 4)

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{ii} + z & a_{ik} & \dots & a_{ir} & a_{is} & \dots \\ a_{ki} & a_{kk} + z & \dots & a_{kr} & a_{ks} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ri} & a_{rk} & \dots & a_{rr} + z & a_{rs} & \dots \\ a_{si} & a_{sk} & \dots & a_{sr} & a_{ss} + z & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Aus dieser Form von $f(z)$ erkennt man (1), dass die Entwicklung des Products

$$\begin{vmatrix} a_{ii} + z & a_{ik} & \dots \\ a_{ki} & a_{kk} + z & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{rr} + z & a_{rs} & \dots \\ a_{sr} & a_{ss} + z & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

einen Theil der gesuchten Entwicklung von der Determinante $f(z)$ bildet. Die Entwicklung des ersten Factors nach Potenzen von z schliesst mit z^m , die des zweiten Factors beginnt mit

$$\begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & \dots \\ a_{sr} & a_{ss} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$z^m \begin{vmatrix} a_{rr} & a_{rs} & \dots \\ a_{sr} & a_{ss} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die allgemeine Formel für ein Glied von $f(z)$, in welchem z^m vorkommt. Indem man für i, k, \dots alle möglichen Combinationen von je m Nummern aus der Reihe $1, 2, \dots, n$, folglich für r, s, \dots

* JACOBI Crelle J. 42 p. 15.

alle möglichen Combinationen von je $n-m$ aus derselben Reihe setzt, erhält man alle Glieder von $f^m z$, in denen der Factor z^m anzutreffen ist.

4. Die Determinante n ten Grades $R = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn}$ kann in eine Summe von

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot n-1 \dots n-m+1}{1 \cdot 2 \dots m} = \mu$$

Producten je einer partialen Determinante m ten Grades und einer zugehörigen partialen Determinante $n-m$ ten Grades zerlegt werden.

Aus den Numern $1, 2, \dots, n$, durch deren Permutationen die Glieder der Determinante R entstehen, wähle man m verschiedene z. B. f, g, h, \dots und bilde die partielle Determinante m ten Grades

$$P = \sum \pm a_{f,1} a_{g,2} a_{h,3} \dots$$

Werden die übrigen Numern durch r, s, t, \dots bezeichnet, so hat P in

$$\epsilon R = \sum \pm a_{f,1} a_{g,2} a_{h,3} \dots a_{r,m+1} a_{s,m+2} a_{t,m+3} \dots$$

zum Coefficienten die partielle Determinante $n-m$ ten Grades

$$Q = \sum \pm a_{r,m+1} a_{s,m+2} a_{t,m+3} \dots$$

wenn ϵ den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die Reihen $f, g, h, \dots, r, s, t, \dots$ und $1, 2, \dots, n$ in dieselbe Classe der Permutationen gehören oder nicht. Dann ist

$$R = \sum \epsilon P Q$$

eine Summe von μ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für f, g, h, \dots alle Combinationen von m verschiedenen Numern der Reihe $1, 2, \dots, n$, für r, s, t, \dots die jedesmal übrigen Numern setzt, und ϵ auf die angegebene Art bestimmt.

Beweis. Ein Product wie PQ enthält diejenigen Glieder von R , welche aus dem Anfangsglied $a_{1,1} \dots a_{n,n}$ dadurch entstehen, dass man von den beweglichen Numern m in eine Gruppe, die übrigen in eine zweite Gruppe vereinigt, und die Numern der einzelnen Gruppen permutirt. Wenn man die einzelnen Gruppen auf alle möglichen Arten bildet und dabei die Numern der Gruppen permutirt, so erhält man alle Permutationen der m beweglichen Numern. Also umfasst die angegebene Summe von Producten alle Glieder von R .

Das Product PQ hat $1, 2, \dots, m + 1, 2, \dots, n - m$ Glieder; in der That hat die Summe aller Producte m mal so viel d. i. $1, 2, \dots, n$ Glieder.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a & b & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c & d \\ a_2 & b_2 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c & d \\ a_3 & b_3 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c & d \\ a_3 & b_3 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}.$$

Die Zerlegung einer Determinante n ten Grades in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten 2ten und $n-2$ ten Grades findet man ausführlich behandelt bei JACOB Det. 9 u. 10.

5. Die Determinante R kann auch in eine Summe von Producten aus mehr als je zwei partialen Determinanten zerlegt werden.

Man wähle aus den beweglichen Numern $1, 2, \dots, n$ zuerst α z. B. f, g, h, \dots ; dann aus den übrigen Numern β z. B. p, q, r, \dots ; dann aus den übrigen γ z. B. t, u, v, \dots n. s. f. so dass $\alpha + \beta + \gamma + \dots = n$; und bilde nun die partialen Determinanten α ten, β ten, γ ten, .. Grades

$$A = \Sigma \pm a_{f,1} a_{g,2} a_{h,3} \dots$$

$$B = \Sigma \pm a_{p,\alpha+1} a_{q,\alpha+2} a_{r,\alpha+3} \dots$$

$$C = \Sigma \pm a_{t,\alpha+\beta+1} a_{u,\alpha+\beta+2} a_{v,\alpha+\beta+3} \dots$$

u. s. w. Dann ist $R = \Sigma \varepsilon ABC \dots$ die Summe von

$$\binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\beta} \binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} \dots = \frac{1, 2, \dots, n}{1, 2, \dots, \alpha, 1, 2, \dots, \beta, 1, 2, \dots, \gamma, \dots}$$

Gliedern, welche entstehen, indem man A, B, C, \dots auf alle möglichen Arten bildet. Dabei bedeutet ε die positive oder negative Einheit, je nachdem die Reihe

$$f, g, h, \dots, p, q, r, \dots, t, u, v, \dots$$

eine Permutation der ersten oder der zweiten Classe von $1, 2, \dots, n$ ist *).

*) Dieser allgemeine Satz heisst der LAPLACE'sche Determinantensatz. Vergl. die vorigen Citate.

6. Wenn die Elemente des Systems verschwinden, welche m Columnen mit $n-m$ Zeilen gemein haben, so reducirt sich die Determinante auf das Product einer Determinante m ten Grades mit einer Determinante $n-m$ ten Grades *).

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Wenn die Elemente verschwinden, welche m Columnen mit mehr als $n-m$ Zeilen gemein haben, so verschwindet die Determinante identisch.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Zerlegt man die gegebene Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten m ten und $n-m$ ten Grades dergestalt, dass die Elemente der Determinanten m ten Grades aus den oben erwähnten m Columnen, die Elemente der Determinanten $(n-m)$ ten Grades aus den übrigen Columnen des Systems gewählt werden (1), so ist unter den zu bildenden Determinanten m ten Grades in dem ersten Falle nur eine, in dem zweiten Falle keine von Null verschieden.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_1+a_4 & a_2+a_3 & a_3+a_2 & a_4+a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_1+b_4 & b_2+b_3 & b_3+b_2 & b_4+b_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_4 & a_2+a_3 & 0 & 0 \\ b_1+b_4 & b_2+b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2-b_3 & b_1-b_4 \\ a_4 & a_3 & a_2-a_3 & a_1-a_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + a_4 & a_2 + a_3 & a_1 - a_4 & a_2 - a_3 \\ b_1 + b_4 & b_2 + b_3 & b_1 - b_4 & b_2 - b_3 \end{vmatrix}.$$

7. Wenn das System der a^2 Elemente $a_{1,1} \dots a_{n,m}$ so beschaffen ist, dass eine partielle Determinante m ten Grades z. B.

$$p = \Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{m,m}$$

nicht verschwindet, dagegen die $n - m + 2$ partialen Determinanten $m + 1$ ten Grades verschwinden, welche aus

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & a_{m,k} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,m} & a_{i,k} \end{vmatrix} = b_{1,i} a_{1,k} + \dots + b_{m,i} a_{m,k} + p a_{i,k}$$

dadurch entstehen, dass man für i und k alle Numern von $m + 1$ bis n setzt, so verschwinden alle partialen Determinanten $m + 1$ ten Grades und der höhern Grade *.

Beweis. Werden $m + 1$ beliebige Numern der Reihe $1, 2, \dots, n$ durch f, g, h, \dots und durch s, t, u, \dots bezeichnet, so ist

$$P = \begin{vmatrix} a_{fs} & a_{ft} & a_{fu} & \dots \\ a_{gs} & a_{gt} & a_{gu} & \dots \\ a_{hs} & a_{ht} & a_{hu} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

eine beliebige partielle Determinante $m + 1$ ten Grades, deren Verschwinden aus den gemachten Voraussetzungen sich ergibt wie folgt. Man verwandle P in eine Determinante $2m + 1$ ten Grades P' , indem man m Columnen von je $m + 1$ Nullen und m Zeilen von je $2m + 1$ Elementen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

hinzufügt §. 2, 6. Multiplicirt man die erste Zeile von P' mit p , und addirt man dazu die mit $b_{1f}, b_{2f}, b_{3f}, \dots$ multiplicirten letzten m Zeilen, so erhält man in der ersten Zeile von pP'

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad b_{1f} \quad b_{2f} \quad \dots \quad b_{mf}.$$

Denn es ist

$$p a_{i,k} + b_{1,i} a_{1,k} + \dots + b_{m,i} a_{m,k} = 0$$

nach der Voraussetzung, wenn i und k Numern der Reihe $m + 1, \dots, n$ sind; identisch, wenn i und k Numern der Reihe

* KRONECKER briefl. Mittheilung 1864 März.

1, 2, ..., m sind §. 2, 4. Zugleich verschwinden identisch unter den Coefficienten b_{1i}, \dots, b_{mi} diejenigen, deren i in der Reihe 1, 2, ..., m enthalten und von der voranstehenden Nummer verschieden ist, während $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{mm}$ den Werth $-p$ haben. Durch dieselbe Transformation der 2ten, ..., $(m+1)$ ten Zeile von P' findet man endlich

$$p^{m+1}P' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & b_{1f} & b_{2f} & b_{3f} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{1g} & b_{2g} & b_{3g} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{1h} & b_{2h} & b_{3h} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{1s} & a_{1t} & a_{1u} & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2s} & a_{2t} & a_{2u} & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ a_{3s} & a_{3t} & a_{3u} & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = 0 \quad (6).$$

8. Um die Determinante $(m+n)$ ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & e_{1,1} & \dots & e_{1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} & e_{m,1} & \dots & e_{m,n} \\ 0 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{n,1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & b_{1,m} & \dots & b_{n,m} \\ a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & e_{m+1,1} & \dots & e_{m+1,n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,m} & e_{n,1} & \dots & e_{n,n} \end{vmatrix}$$

deren Elemente $e_{1,1} \dots e_{n,n}$ so angenommen werden, dass $e_{i,k}$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind, zu entwickeln, bilde man aus den ersten m Columnen eine beliebige nicht verschwindende partielle Determinante m ten Grades

$$A = \Sigma \pm a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_m}.$$

Um den Coefficienten B , welchen A in R besitzt, zu finden, permutire man die von den Elementen b unabhängigen Zeilen, bis dass die f te, g te, ..., h te Zeile zur 1ten, 2ten, ..., m ten gemacht ist und die übrigen Zeilen folgen; dann nehme man dieselben Vertauschungen der von den Elementen a unabhängigen Columnen vor. Hierdurch hat die Determinante R keinen Wechsel erlitten, und in jede Stelle des Systems, welche ein Element e mit 2 gleichen Nummern enthielt, ist wiederum ein solches

Element eingetreten. Also ist der Coefficient B die Determinante m ten Grades

$$\Sigma \pm b_{1f} b_{2g} \dots b_{ml} e_{rr} e_{ss} \dots = \Sigma \pm b_{1f} b_{2g} \dots b_{ml} \quad \S. 2, 7.$$

Demnach ist $(1) R = \Sigma AB$ eine Summe, deren Glieder dadurch entstehen, dass man für f, g, \dots, l alle Combinationen von m verschiedenen Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ setzt.

9. Aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ können m verschiedene Nummern auf

$$u = \binom{n}{m}$$

verschiedene Arten gewählt werden. Diese Combinationen sollen nach Belieben die Nummern $1, 2, \dots, u$ erhalten. Haben nun z. B. die Combinationen $fgh \dots$ und $stu \dots$ die Nummern γ und δ , so soll die partielle Determinante m ten Grades

$$\Sigma \pm a_{fs} a_{gt} a_{hu} \dots$$

durch $p_{\gamma\delta}$, und deren Coefficient in $A = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$ durch $p'_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden.

Lehrsatz. Die Summen

$$p_{11} p'_{\delta 1} + p_{12} p'_{\delta 2} + \dots + p_{1u} p'_{\delta u} \\ p_{1\gamma} p'_{1\delta} + p_{2\gamma} p'_{2\delta} + \dots + p_{u\gamma} p'_{u\delta}$$

haben den Werth A oder 0 , je nachdem die Nummern γ und δ übereinstimmen oder nicht. (Vergl. §. 3, 3').

Beweis. Wenn man die partialen Determinanten

$$p_{\delta 1}, p_{\delta 2}, \dots, p_{\delta u}$$

bildet und die ihnen in A zugehörigen Coefficienten durch

$$p'_{\delta 1}, p'_{\delta 2}, \dots, p'_{\delta u}$$

bezeichnet, so hat man (1)

$$A = p_{\delta 1} p'_{\delta 1} + p_{\delta 2} p'_{\delta 2} + \dots + p_{\delta u} p'_{\delta u}.$$

Aus denselben Gründen folgt die Entwicklung

$$A = p_{1\delta} p'_{1\delta} + p_{2\delta} p'_{2\delta} + \dots + p_{u\delta} p'_{u\delta}.$$

Die Reihe der ersten (zweiten) Nummern derjenigen Elemente a , aus denen das Anfangsglied von $p_{\gamma\eta}$ besteht, bildet mit der Reihe der ersten (zweiten) Nummern derjenigen Elemente, die in dem Anfangsglied von $p'_{\gamma\eta}$ vorkommen, zusammen eine Reihe von n Nummern, die alle von einander verschieden sind (1). Dagegen bildet die zuerst erwähnte Reihe mit der Reihe der

* CACHY l. c. p. 400.

§. 5. Producte von Determinanten.

1. Lehrsatz. Wenn aus zwei gegebenen Systemen von Elementen

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_{n1} & \dots & b_{np} \end{array}$$

ein drittes System von Elementen gebildet ist

$$\begin{array}{cccc} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array}$$

nämlich das k te Element der i ten Zeile c_{ik} dadurch, dass man die Elemente der i ten Zeile im ersten System

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ip}$$

der Reihe nach mit den Elementen der k ten Zeile im zweiten System

$$b_{k1} \quad b_{k2} \quad \dots \quad b_{kp}$$

multipliziert und die Producte addirt, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{ip} b_{kp},$$

so kann die Determinante $R = \Sigma \pm c_{11} \dots c_{nn}$ des abgeleiteten Systems aus Determinanten von Systemen der gegebenen Elemente berechnet werden.

Man bilde aus einer beliebigen Combination von n Columnen des ersten Systems die Determinante P , und aus P durch Vertauschung von a mit b die Determinante Q , deren Elemente dem zweiten System angehören. Dann ist $R = \Sigma PQ$ die Summe aller $\binom{p}{n}$ möglichen Producte PQ . Wenn $p = n$, so reducirt sich R auf das eine Product PQ . Wenn $p < n$, so verschwindet R identisch *.

Beweis. Wenn jede der n Nummern r, s, t, \dots der Reihe nach die Werthe $1, 2, \dots, p$ erhält, so ist nach Voraussetzung das Anfangsglied der Determinante R

* BINET und CAUCHY in den gleichzeitigen Abhandlungen J. de l'éc. polyt. Cah. 16 p. 286 und Cah. 17 p. 81, 107) haben diesen Satz durch Betrachtung der besondern Fälle, welche LAGRANGE (Mem. de l'acad. de Berlin 1773 p. 285 und GAUSS Disquis. arithm. 157, 159, 268, 4 gegeben hatten, abgeleitet. Vergl. JACOB Det. 13 und 14.

$$\begin{aligned}
 c_{11} c_{22} \dots c_{nn} &= \sum_r a_{1r} b_{1r} \sum_s a_{2s} b_{2s} \sum_t a_{3t} b_{3t} \dots \\
 &= \sum_{r,s,t,\dots} a_{1r} a_{2s} a_{3t} \dots b_{1r} b_{2s} b_{3t} \dots
 \end{aligned}$$

Daraus entspringen die übrigen Glieder von R , indem die zweiten Nummern der Elemente c permutirt werden, während die ersten Nummern unbeweglich bleiben. Bei diesem Verfahren werden aber unter dem Summenzeichen nur die ersten Nummern der Elemente b permutirt, die andern erleiden keine Veränderung. Daher ist

$$\begin{aligned}
 R &= \sum_{r,s,t,\dots} a_{1r} a_{2s} a_{3t} \dots \sum \pm b_{1r} b_{2s} b_{3t} \dots \\
 &= \sum_{r,s,t,\dots} a_{1r} a_{2s} a_{3t} \dots Q.
 \end{aligned}$$

Die Determinante Q verschwindet, wenn unter den Nummern r, s, t, \dots zwei gleiche vorkommen (§. 2, 4). Mithin erhält man alle Glieder der zu bildenden Summe, wenn man für r, s, t, \dots alle Complexionen von je n verschiedenen Nummern aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ setzt.

Ist nun $p < n$, so ist $R = 0$. Denn r, s, t, \dots , die aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ zu nehmen sind und deren Anzahl n ist, können nicht alle von einander verschieden sein; folglich ist Q bei jeder möglichen Wahl von r, s, t, \dots identisch $= 0$.

Ist $p = n$, so können für r, s, t, \dots nur die verschiedenen Permutationen von $1, 2, \dots, n$ gesetzt werden, weil bei jeder andern Bestimmung Q identisch verschwinden würde. Durch Permutation der Nummern r, s, t, \dots wird aber Q entweder in Q oder in $-Q$ verwandelt (§. 2, 4), folglich umfasst die mit R bezeichnete Summe alle Glieder der Determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ mit dem Factor Q behaftet, d. h.

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ist $p > n$, so können für die Complexion der Nummern r, s, t, \dots zunächst alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ gesetzt werden. Dadurch findet man $\binom{p}{n}$ Glieder der zu bildenden Summe, aus denen die übrigen sich ableiten lassen, indem man für jede Combination r, s, t, \dots ihre Permutationen setzt. Nach den im Falle $p = n$ gemachten Bemerkungen bildet

jedes der $\binom{p}{n}$ Glieder im Verein mit den aus ihm abgeleiteten Gliedern das Product von zwei Determinanten PQ , also ist

$$R = \sum \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & \cdot \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & \cdot \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1r} & b_{1s} & b_{1t} & \cdot \\ b_{2r} & b_{2s} & b_{2t} & \cdot \\ b_{3r} & b_{3s} & b_{3t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

wo für r, s, t, \dots alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, 3, \dots, p$ zu setzen sind.

Beispiel. Wenn

$$d_{ik} = a_i f_k + b_i g_k + c_i h_k$$

so ist

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}.$$

2. Wenn insbesondere die Elemente b den mit denselben Numern versehenen Elementen a gleich sind, so ist das System der Elemente c symmetrisch, d. h.

$$c_{ik} = a_{i1} a_{k1} + a_{i2} a_{k2} + \dots + a_{ip} a_{kp} = c_{ki},$$

folglich

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & \cdot \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & \cdot \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^2$$

worin man für r, s, t, \dots alle Combinationen von je n aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ zu setzen hat, um alle Glieder der Summe zu erhalten.

So lange die Elemente a real sind, ist die Determinante $\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn}$ positiv und kann nur dadurch verschwinden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} & a_{1t} & \cdot \\ a_{2r} & a_{2s} & a_{2t} & \cdot \\ a_{3r} & a_{3s} & a_{3t} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

bei allen Combinationen x, y, z, \dots verschwindet Δ . Die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx_1 + yy_1 + zz_1 & xx_2 + yy_2 + zz_2 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ xx_2 + yy_2 + zz_2 & x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & xx_1 + yy_1 + zz_1 \\ xx_1 + yy_1 + zz_1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

sind bereits von LAGRANGE *sur les pyr.* 3 u. 4, gefunden worden.

3. Der Hauptsatz über die Zerlegung einer Determinante, deren Elemente Summen von Producten der angegebenen Art sind (1.), kann auf den LAPLACE'schen Determinantensatz zurückgeführt werden wie folgt Δ .

Man verwandle die Determinante $\Sigma \pm c_{11} \dots c_{nn}$ in die Determinante $n + p$ ten Grades (§. 2, 6)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{np} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Indem man nun von der i ten Colonne die letzten p der Reihe nach mit a_{i1}, a_{i2}, \dots multiplicirten Colonnen subtrahirt, und auf diese Weise die ersten n Colonnen transformirt, erhält man zufolge der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{ip} b_{kp}$$

den Ausdruck für $\Sigma \pm c_{11} \dots c_{nn}$

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{np} \\ -a_{11} & \dots & -a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1p} & \dots & -a_{np} & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplirt man endlich jede der ersten n Colonnen mit -1 , und rückt die zweiten n Zeilen des Systems an den Anfang, so erhält man (nach $n + n^2$ Zeichenwechseln)

* JACOBI I. c.

** GORDAN nach briefl. Mittheilung des Hrn. Prof. CLEBSCH 1863 Nov.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & b_{1,n+1} & \dots & b_{1p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & b_{n1} & \dots & b_{nn} & b_{n,n+1} & \dots & b_{np} \\ a_{1,n+1} & \dots & a_{n,n+1} & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1p} & \dots & a_{np} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Die Entwicklung dieser Determinante in eine Summe von Producten aus partialen Determinanten n ten Grades ist §. 4. 8 gezeigt worden.

4. Das Product von zwei Determinanten n ten Grades P und Q ist eine Determinante R desselben Grades, die man auf 4 im Allgemeinen verschiedene Arten darstellen kann*, indem man ihre Elemente entweder aus je einer Zeile von P und einer Zeile von Q zusammensetzt, oder aus je einer Zeile von P und einer Colonne von Q , oder aus je einer Colonne von P und einer Zeile von Q , oder aus je einer Colonne von P und einer Colonne von Q . Wenn nämlich

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

so ist

$$R = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = PQ$$

unter der Voraussetzung

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}.$$

Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + \dots + a_{1n} b_{1n}, & a_{11} b_{21} + \dots + a_{1n} b_{2n}, & \dots, & a_{11} b_{n1} + \dots + a_{1n} b_{nn} \\ a_{21} b_{11} + \dots + a_{2n} b_{1n}, & a_{21} b_{21} + \dots + a_{2n} b_{2n}, & \dots, & a_{21} b_{n1} + \dots + a_{2n} b_{nn} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ a_{n1} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & a_{n1} b_{21} + \dots + a_{nn} b_{2n}, & \dots, & a_{n1} b_{n1} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix}$$

* CAUCHY l. c. p. 83.

Nach der hierin enthaltenen Bildungsregel ist ferner

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + \dots + a_{1n} b_{n1}, & \dots, & a_{11} b_{1n} + \dots + a_{1n} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{n1}, & \dots, & a_{n1} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{n1}, & \dots, & a_{n1} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + \dots + a_{n1} b_{1n}, & \dots, & a_{11} b_{1n} + \dots + a_{n1} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & \dots, & a_{1n} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & \dots, & a_{1n} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + \dots + a_{n1} b_{1n}, & \dots, & a_{11} b_{1n} + \dots + a_{n1} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & \dots, & a_{1n} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} b_{11} + \dots + a_{nn} b_{1n}, & \dots, & a_{1n} b_{1n} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die links stehenden Determinanten, deren Product gebildet wurde, sind von P und Q nicht verschieden §. 2, 3. Also sind die rechts stehenden Determinanten von R nicht verschieden, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn c_{ik} eine der Summen

$$\begin{aligned} a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}, \\ a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}, \\ a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots + a_{ni} b_{kn}, \\ a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots + a_{ni} b_{nk} \end{aligned}$$

bedeutet.

5. Das Product von beliebig vielen Determinanten ist eine Determinante, deren Grad den höchsten unter den gegebenen Graden nicht übersteigt und deren Elemente ganze rationale Functionen der gegebenen Elemente sind. Wenn nämlich die Grade der gegebenen Determinanten den n ten Grad nicht übersteigen, so kann man alle Determinanten als solche n ten Grades darstellen und dann nach der Regel 4 die erste mit der zweiten multipliciren, das Product mit der dritten u. s. f.

Nach §. 2, 6 ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn für $i > m$ das Element a_{ik} den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $k < i$ oder $k = i$ ist; die übrigen nicht gegebenen Elemente bleiben unbestimmt. Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{vmatrix},$$

wenn

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn}.$$

Von diesem Aggregat bleiben für $i > m$ nur die Glieder

$$b_{ki} + a_{i,i+1} b_{k,i+1} + \dots + a_{in} b_{kn}.$$

Wenn die unbestimmten Elemente sämtlich verschwinden, so erhält man

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{im} b_{km},$$

wovon für $i > m$ nur b_{ki} übrig bleibt.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_0 & q_0 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 p_0 + b_0 q_0 & a_0 p_1 + b_0 q_1 & c_0 & d_0 \\ a_1 p_0 + b_1 q_0 & a_1 p_1 + b_1 q_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 p_0 + b_2 q_0 & a_2 p_1 + b_2 q_1 & c_2 & d_2 \\ a_3 p_0 + b_3 q_0 & a_3 p_1 + b_3 q_1 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

6. Wenn $A = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, $B = \Sigma \pm b_{11} \dots b_{nn}$ und

$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + \dots + a_{in} b_{kn}$$

so dass die Determinante des zusammengesetzten Systems 1.)

$$C = \Sigma \pm c_{11} \dots c_{nn} = AB$$

ist; wenn ferner die Coefficienten der Elemente a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} in A , B , C durch α_{ik} , β_{ik} , γ_{ik} bezeichnet werden (§. 3 : wenn überhaupt partielle Determinanten m ten Grades der drei Systeme in der oben §. 4, 9) angegebenen Bedeutung durch $p_{\gamma\delta}$, $q_{\gamma\delta}$, $r_{\gamma\delta}$ bezeichnet werden, so ist *)

$$\gamma_{ik} = a_{i1} \beta_{k1} + \dots + a_{in} \beta_{kn}$$

$$c_{i\delta} = p_{i1} q_{\delta 1} + \dots + p_{ip} q_{\delta p}$$

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \dots \gamma_{nn} = \Sigma \pm \alpha_{11} \dots \alpha_{nn} \Sigma \pm \beta_{11} \dots \beta_{nn}$$

$$\Sigma \pm r_{11} \dots r_{pp} = \Sigma \pm p_{11} \dots p_{pp} \Sigma \pm q_{11} \dots q_{pp}.$$

Wenn insbesondere das zweite System mit dem ersten übereinstimmt d. h. $b_{ik} = a_{ik}$, so ist das zusammengesetzte System symmetrisch, und man hat

*) CAUCHY l. c. p. 90, 107, 108.

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= \alpha_{i1}^2 + \dots + \alpha_{in}^2 \\ r_{\delta\delta} &= p_{\delta 1}^2 + \dots + p_{\delta n}^2 \\ \Sigma \pm \gamma_{11} \dots \gamma_{nn} &= \Sigma \pm \alpha_{11} \dots \alpha_{nn}^2 \\ \Sigma \pm r_{11} \dots r_{nn} &= \Sigma \pm p_{11} \dots p_{nn}^2. \end{aligned}$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist die partielle Determinante m ten Grades

$$r_{i\delta} = \Sigma \pm c_{fs} c_{gt} c_{hu} \dots$$

und ihr Anfangsglied

$$\begin{aligned} c_{fs} c_{gt} c_{hu} \dots &= \left(\Sigma_i a_{fi} b_{si} \right) \left(\Sigma_k a_{gk} b_{tk} \right) \left(\Sigma_l a_{hl} b_{ul} \right) \dots \\ &= \Sigma_{i,k,l,\dots} a_{fi} a_{gk} a_{hl} \dots b_{si} b_{tk} b_{ul} \dots \end{aligned}$$

Indem man die Nummern s, t, u, \dots unter einander vertauscht, findet man

$$r_{i\delta} = \Sigma_{i,k,l,\dots} (a_{fi} a_{gk} a_{hl} \dots \Sigma \pm b_{si} b_{tk} b_{ul} \dots)$$

Um die Glieder dieser Summe zu bilden, braucht man für i, k, l, \dots nur je m verschiedene Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ zu setzen, weil die Determinante $\Sigma \pm b_{si} b_{tk} b_{ul} \dots$ verschwindet, wenn die Nummern i, k, l, \dots nicht alle von einander verschieden sind. Wenn man aber für bestimmte Nummern i, k, l, \dots deren Permutationen setzt, so erleidet $\Sigma \pm b_{si} b_{tk} b_{ul} \dots$ nur einen oder mehrere Zeichenwechsel, also ist

$$r_{i\delta} = \Sigma_{i,k,l,\dots} \Sigma \pm a_{fi} a_{gk} a_{hl} \dots \Sigma \pm b_{si} b_{tk} b_{ul} \dots$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für i, k, l, \dots alle Combinationen von je m verschiedenen Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ setzt, d. h. nach der angenommenen Bezeichnung

$$p_{i1} q_{\delta 1} + p_{i2} q_{\delta 2} + \dots + p_{i\mu} q_{\delta \mu}.$$

Aus dem gefundenen Werth von $r_{i\delta}$ folgt nach 1. der Werth der Determinante μ ten Grades $\Sigma \pm r_{11} \dots r_{\mu\mu}$. Die Grossen $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ sind partielle Determinanten $(n-1)$ ten Grades, folglich u. s. w.

§. 6. Determinanten von adjungirten Systemen.

1. Wenn α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so heisst das System der Elemente

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{array}$$

dem System der Elemente a adjungirt*.

Lehrsatz. Die Determinante des Systems von Elementen, welches einem System von n^2 Elementen adjungirt ist, ist die $(n-1)$ te Potenz der Determinante des gegebenen Systems**.

Beweis. Wenn man das Product

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach der Multiplicationsregel (§. 3, 4) bildet, so erhält man

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

worin

$$c_{ik} = \alpha_{i1} a_{k1} + \alpha_{i2} a_{k2} + \cdot + \alpha_{in} a_{kn}.$$

Diese Elemente haben den Werth R oder 0 , je nachdem k und i gleich oder verschieden sind (§. 3, 3). Also reducirt sich die Determinante ihres Systems auf das Anfangsglied $c_{11} c_{22} \cdot \cdot c_{nn} = R^n$ (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} R = R^n,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}^{n-1}.$$

* CAUCHY l. c. p. 64 hat diese Benennung aus der Theorie der quadratischen Formen (GAUSS disquis. arithm. 267) aufgenommen.

** CAUCHY l. c. p. 82. Den Fall $n=3$ findet man bei LAGRANGE sur les pyr. 5 und bei GAUSS l. c.

2. Lehrsatz. Eine partielle Determinante des adjungirten Systems vom n ten Grade ist das Product von R^{m-1} mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partielle Determinante des ursprünglichen Systems in R hat *.

Beweis. Wenn

$$\begin{aligned} f, g, \dots, r, s, \dots \\ i, k, \dots, u, v, \dots \end{aligned}$$

gegebene Permutationen von $1, 2, \dots, n$ sind und darin f, g, \dots und i, k, \dots Gruppen von m Nummern bedeuten, während die übrigen $n - m$ Nummern durch r, s, \dots und u, v, \dots bezeichnet werden, so ist die Determinante n ten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \dots \\ a_{gi} & a_{gk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante des adjungirten Systems (§. 4, I), welche nach §. 2, 6 in folgende Determinante n ten Grades transformirt werden kann:

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \dots & a_{fu} & a_{fv} & \dots \\ a_{gi} & a_{gk} & \dots & a_{gu} & a_{gv} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist aber

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \dots & a_{fu} & a_{fv} & \dots \\ a_{gi} & a_{gk} & \dots & a_{gu} & a_{gv} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ri} & a_{rk} & \dots & a_{ru} & a_{rv} & \dots \\ a_{si} & a_{sk} & \dots & a_{su} & a_{sv} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \varepsilon R,$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die gegebenen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht (§. 2, 4). Wenn man das Product dieser beiden Determinanten durch zeilenweise Multiplication bildet, so findet man die Determinante n ten Grades

* Jacobi Det. 41. Dieser Beweis ist von BORCHARDT angegeben worden. Briefl. Mittheilung 1853 Juli.

$$\begin{vmatrix} R & 0 & \cdot & \cdot & a_{fu} & a_{fv} & \cdot & \cdot \\ 0 & R & \cdot & \cdot & a_{gu} & a_{gv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{ru} & a_{rv} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{su} & a_{sv} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante reducirt sich aber auf das Product von zwei Determinanten (§. 4, 6), deren erste den Werth R^m hat (§. 2, 7). Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = R^{m-1} \varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & \cdot \\ a_{su} & a_{sv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}.$$

Nach §. 4, 4 bedeutet

$$\varepsilon \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{rv} & \cdot \\ a_{su} & a_{sv} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

den Coefficienten, mit welchem in R die partiale Determinante des gegebenen Systems

$$\begin{vmatrix} a_{fi} & a_{fk} & \cdot \\ a_{gi} & a_{gk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

versehen ist, deren Elemente mit denen der gesuchten Determinante in Hinsicht der Nummern übereinstimmen.

Beispiele. Wenn $R = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdot & \cdot & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,k+1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = R^{n-k-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \cdot & \cdot & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Wenn insbesondere $n = 5$ ist, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix} = - R^2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{15} \\ a_{32} & a_{35} \end{vmatrix},$$

weil die Permutationen

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{array}$$

nicht in eine Classe gehören.

Dagegen ist

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = R \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

weil

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

Permutationen derselben Classe sind.

Der Coefficient des Elements a_{ik} in der Determinante des adjungirten Systems $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ ist

$$R^{n-2} a_{ik}^*.$$

Denn dieser Coefficient ist eine partielle Determinante des adjungirten Systems vom $n-1$ ten Grade und der Coefficient, welchen die entsprechende partielle Determinante des ursprünglichen Systems in R hat, ist a_{ik} , folglich u. s. w. (2).

Wenn insbesondere $n=3$, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = R a_{33}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = R a_{31} \text{ u. s. w. } (**).$$

3. Um eine partielle Determinante zweiten Grades im adjungirten System zu berechnen, z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{ji} & a_{jk} \\ a_{gi} & a_{gh} \end{vmatrix},$$

bedarf man des Coefficienten, welchen die entsprechende Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{ji} & a_{jk} \\ a_{gi} & a_{gh} \end{vmatrix}$$

in R hat. Dieser Coefficient stimmt mit demjenigen überein, welchen das Product $a_{ji} a_{gh}$ in R hat §. 4, 1. Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{ji} & a_{jk} \\ a_{gi} & a_{gh} \end{vmatrix} = R \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ji} \partial a_{gh}} \dots$$

Ebenso ist

$$\begin{vmatrix} a_{ji} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{gi} & a_{gh} & a_{gl} \\ a_{hi} & a_{hk} & a_{hl} \end{vmatrix} = R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial a_{ji} \partial a_{gh} \partial a_{hl}} \text{ u. s. f.}$$

* CAYLEY l. c. p. 82

** LAGRANGE sur les pyr. 3.

*** JACOBI Det. 40.

Diese Identitäten geben zugleich an, wie man zweite, dritte, . . . partielle Differentialquotienten einer Determinante durch erste partielle Differentialquotienten derselben ausdrücken kann.

Beispiel. Weil (§. 3, 13) $dR = \sum_{i,k} \alpha_{ik} da_{ik}$ und

$$da_{rs} = \sum_{i,k} \frac{\partial a_{rs}}{\partial a_{ik}} da_{ik} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 R}{\partial a_{rs} \partial a_{ik}} da_{ik}$$

$$R da_{rs} = \sum_{i,k} \alpha_{rs} \alpha_{ik} - \alpha_{is} \alpha_{rk} da_{ik}$$

ist, so findet man

$$R da_{rs} - \alpha_{rs} dR = - \sum_{i,k} \alpha_{is} \alpha_{rk} da_{ik}$$

$$R^2 d \frac{\alpha_{rs}}{R} = - \sum_{i,k} \alpha_{is} \alpha_{rk} da_{ik}.$$

4. Bezeichnet man in der Determinante

$$V_{r+1} = \sum \pm a_{11} \dots a_{r+1,r+1}$$

den Coefficienten des Elements a_{ik} durch α_{ik} , so ist

$$\alpha_{r+1,r+1} = V_r, \quad \frac{\partial^2 V_{r+1}}{\partial a_{rr} \partial a_{r+1,r+1}} = V_{r-1}$$

folglich (§.)

$$\alpha_{rr} V_r - \alpha_{r,r+1} \alpha_{r+1,r} = V_{r+1} V_{r-1}.$$

Wenn insbesondere die correspondirenden Elemente a_{ik} und a_{ki} gleich oder conjugirt complex sind, so ist das Product $\alpha_{r,r+1} \alpha_{r+1,r}$ real und positiv (§. 3, 13). Also haben, während V_r verschwindet, V_{r+1} und V_{r-1} Werthe von entgegengesetzten Zeichen ** .

5. Wenn R verschwindet, so verschwinden auch die partialen Determinanten des adjungirten Systems vom 2ten, 3ten, . . . Grade, weil sie den Factor R enthalten [2]. Aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ji} & \alpha_{jk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = 0$$

folgen die Proportionen

^{*}) WEIERSTRASS Berl. Monatsbericht 1858 p. 214.

^{**}) BRIOSCHI Det. p. 72.

$$\begin{aligned} a_{ji} \cdot a_{jk} &= a_{ji} \cdot a_{gk}, & a_{ji} \cdot a_{gi} &= a_{jk} \cdot a_{gk} \\ a_{j1} \cdot a_{j2} \cdot a_{j3} \cdot \dots &= a_{g1} \cdot a_{g2} \cdot a_{g3} \cdot \dots \\ a_{11} \cdot a_{21} \cdot a_{31} \cdot \dots &= a_{1k} \cdot a_{2k} \cdot a_{3k} \cdot \dots * \\ a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \cdot \dots &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \end{aligned}$$

Wenn insbesondere die Elemente des gegebenen Systems so beschaffen sind, dass $a_{ik} = \pm a_{ki}$, so hat man unter der Voraussetzung $R = 0$ für jedes i

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 + \dots = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots$$

6. Analoge Sätze gelten für das System der partialen Determinanten n ten Grades, welche zu dem System der Elemente $a_{11} \dots a_{nn}$ gehören.

$$\begin{array}{cccc} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{array}$$

von denen $p_{\gamma\delta}$ die oben §. 4, 9 angegebene Bedeutung hat, und für das adjungirte System der partialen Determinanten $n-m$ ten Grades

$$\begin{array}{cccc} p'_{11} & \dots & p'_{1\mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p'_{\mu 1} & \dots & p'_{\mu\mu} \end{array}$$

von denen $p'_{\gamma\delta}$ den Coefficienten von $p_{\gamma\delta}$ in der Determinante $R = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn}$ bedeutet. Bei diesen Bezeichnungen hat man die Identitäten

$$\begin{aligned} \sum \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu} \sum \pm p'_{11} \dots p'_{\mu\mu} &= R^n \\ \sum \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu} &= R^{\frac{n-1}{m-1}}, & \sum \pm p'_{11} \dots p'_{\mu\mu} &= R^{\frac{n-1}{m-1} \cdot *}, \end{aligned}$$

Beweis. Das Product $\sum \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu} \sum \pm p'_{11} \dots p'_{\mu\mu}$ ist eine Determinante μ ten Grades, welche sich auf ihr Anfangsglied R^μ reducirt, weil ihr Element

$$p_{\gamma 1} p'_{\delta 1} + \dots + p_{\gamma \mu} p'_{\delta \mu}$$

den Werth R oder 0 hat, je nachdem die Nummern γ und δ übereinstimmen oder nicht (§. 4, 5.).

Da nun R^μ durch $P = \sum \pm p_{11} \dots p_{\mu\mu}$ theilbar und R eine Function ersten Grades eines bestimmten Elements z. B. a_{11} ist,

* Avron Crelle J. 45 p. 404 und anderwärts.

** Diese Identitäten sind die erste von Cauchy l. c. p. 402 die beiden andern von FRANKI Crelle J. 64 p. 350 gefunden worden.

so kann P von einer Potenz von R nur durch einen von den Elementen a_{11}, \dots, a_{nn} unabhängigen Coefficienten unterschieden sein. Unter den $\mu = \binom{n}{m}$ Combinationen der Nummern $1, 2, \dots, n$ giebt es aber $\lambda = \binom{n-1}{m-1}$ solche, in denen 1 vorkommt. Es giebt also λ Zeilen und λ Columnen des Systems $p_{11}, \dots, p_{\mu\mu}$, deren gemeinschaftliche Elemente Functionen ersten Grades von a_{11} sind, mithin ist P eine Function λ ten Grades von a_{11} und durch R^λ theilbar. Der Quotient $P : R^\lambda$ ist 1, wie sich aus der Betrachtung eines besondern Falles ergibt. Wenn z. B. alle Elemente der Diagonale a_{11}, \dots, a_{nn} den Werth 1 haben und die übrigen Elemente verschwinden, so ist $R = 1$, während $p_{\gamma\delta}$ den Werth 1 oder 0 erhält, je nachdem γ und δ übereinstimmen oder nicht. Daher ist $P = 1$ und $P : R^\lambda = 1$.

7. Eine partielle Determinante des Systems $p_{11}, \dots, p_{\mu\mu}$ vom ω ten Grade ist das Product von $R^{\omega-(\mu-\lambda)}$ mit dem Coefficienten, welchen die entsprechende partielle Determinante des Systems $p'_{11}, \dots, p'_{\mu\mu}$ in der Determinante dieses Systems $\Sigma \pm p'_{11} \dots p'_{\mu\mu}$ hat *).

Beweis. Wenn wie oben 2

$$\begin{aligned} f, g, \dots, v, s, \dots \\ i, k, \dots, u, v, \dots \end{aligned}$$

Permutationen von $1, 2, \dots, \mu$ sind und darin f, g, \dots und i, k, \dots Gruppen von ω Nummern bedeuten, während die übrigen $\mu - \omega$ Nummern durch v, s, \dots und u, v, \dots bezeichnet werden, so kann die partielle Determinante ω ten Grades

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \dots \\ p_{gi} & p_{gk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

in die Determinante μ ten Grades transformirt werden

$$\begin{vmatrix} p_{fi} & p_{fk} & \dots & p_{fu} & p_{fv} & \dots \\ p_{gi} & p_{gk} & \dots & p_{gu} & p_{gv} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

*) FRANKE Crelle J. 61 p. 350 und BORCHARDT's Bemerkung zu diesem Aufsatz.

Multiplieirt man dieselbe mit

$$\begin{vmatrix} p'_{ji} & p'_{jk} & \dots & p'_{jn} & p'_{jr} & \dots \\ p'_{gi} & p'_{gk} & \dots & p'_{gu} & p'_{gr} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p'_{ri} & p'_{rk} & \dots & p'_{ru} & p'_{rr} & \dots \\ p'_{si} & p'_{sk} & \dots & p'_{su} & p'_{sr} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \epsilon \Sigma \pm p'_{ii} \dots p'_{\mu\mu},$$

wobei ϵ den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem die obigen Permutationen in eine Classe gehören oder nicht, so findet man §. 4, 9

$$\begin{vmatrix} R & 0 & \dots & p'_{jn} & p'_{jr} & \dots \\ 0 & R & \dots & p'_{gu} & p'_{gr} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & p'_{ru} & p'_{rr} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p'_{su} & p'_{sr} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\Sigma \pm p'_{ii} \dots p'_{\mu\mu} \Sigma \pm p'_{ji} p'_{gk} \dots = \epsilon R^n \Sigma \pm p'_{ru} p'_{sr} \dots$$

wobei $\epsilon \Sigma \pm p'_{ru} p'_{sr} \dots$ den Coefficienten von $\Sigma \pm p'_{ji} p'_{gk} \dots$ in der Determinante $\Sigma \pm p'_{ii} \dots p'_{\mu\mu} = R^{n-k}$ bedeutet.

§. 7. Determinante eines Systems, dessen correspondirende Elemente a_{ik} und a_{ki} entgegengesetzt gleich sind.

1. **Lehrsatz.** Wenn n eine gerade Zahl ist und die Elemente des Systems $a_{11} \dots a_{nn}$ so beschaffen sind, dass

$$a_{ki} = -a_{ik} \quad \text{und} \quad a_{ii} = 0,$$

so ist die Determinante $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$ ein Quadrat^{*)}.

Beweis. Wenn $R_m = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$, so gilt bei beliebigen Elementen die Identität §. 6, 3)

$$R_m R_{m-2} = \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1, m-1}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{mm}} - \frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1, m}} \frac{\partial R_m}{\partial a_{m, m-1}}.$$

In dem vorliegenden Falle bei geradem m ist §. 3, 11)

^{*)} CAYLEY Crelle J. 38 p. 95. Der hier mitgetheilte Beweis ist von Borchardt 1858 angegeben worden. Einen andern Beweis hat SCHUBNER Leipz. Berichte 1859 p. 154 geführt.

$$\frac{\partial R_m}{\partial a_{ii}} = 0, \quad \frac{\partial R_m}{\partial a_{ki}} = - \frac{\partial R_m}{\partial a_{ik}},$$

folglich

$$R_m R_{m-2} = \left(\frac{\partial R_m}{\partial a_{m-1,m}} \right)^2$$

d. h. R_m ein Quadrat, wenn R_{m-2} ein Quadrat ist. Nun ist R_2 ein Quadrat, also sind auch R_4, R_6, \dots Quadrate.

2. Um die Formel zu finden, deren Quadrat die Determinante R ist, bezeichne man den Coefficienten des Elements a_{ii} durch R' , und den Coefficienten des Elements a_{ik} in R' durch α_{ik} . Dann ist allgemein §. 3, 16

$$R = a_{ii} R' - \sum a_{ik} a_{ik} \alpha_{ik},$$

wenn die Glieder der Summe dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Nummern der Reihe $2, 3, \dots, n$ setzt. Bei dem vorausgesetzten System ist $R' = 0$, $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ §. 3, 13, folglich §. 6, 3)

$$\alpha_{ik}^2 = a_{ii} \alpha_{kk}.$$

Nun sind α_{ii} und α_{kk} Quadrate (1), also ist auch α_{ik} ein Quadrat, folglich

$$\begin{aligned} R &= \sum a_{ii} a_{ik} \sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}} = \sum a_{ii} \sqrt{\alpha_{ii}} \sum a_{ik} \sqrt{\alpha_{kk}} \\ &= \left(\sum a_{ii} \sqrt{\alpha_{ii}} \right)^2, \end{aligned}$$

wenn man die Zeichen der Wurzeln so bestimmt, dass das Product $\sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}}$ den Werth α_{ik} (nicht $-\alpha_{ik}$) hat.

Hiernach ist \sqrt{R} ein Aggregat von $n-1$ mal so viel Gliedern, als $\sqrt{\alpha_{ii}}$ hat. Ebenso kann man $\sqrt{\alpha_{ii}}$ in ein Aggregat von $n-3$ Gliedern zerlegen, weil α_{ii} eine Determinante $(n-2)$ ten Grades von der hier betrachteten Art ist, u. s. f. Daher ist \sqrt{R} ein Aggregat von

$$(n-1)(n-3) \dots 3 \cdot 1 = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{2^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot 2 \dots \frac{n}{2}}$$

Gliedern. Jedes Glied von \sqrt{R} ist ein Product von $\frac{n}{2}$ Elementen, unter deren Nummern zwei gleiche überhaupt nicht vorkommen. Als Anfangsglied findet man

$$a_{12} a_{34} \dots a_{n-1,n}.$$

In der That ist

$$a_{12} a_{34} \dots a_{n-1,n}^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} a_{12} a_{21} a_{34} a_{43} \dots a_{n-1,n} a_{n,n-1}$$

ein positives Glied der Determinante R , weil die Permutationen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & . & . & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & . & . & n & n-1 \end{array}$$

einer Classe angehören oder nicht, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade.

3. Lehrsatz. Die Formel $S = a_{12} a_{34} \dots a_{n-1,n} + \dots$, deren Quadrat der vorhin betrachteten Determinante R gleichkommt, ist alternirend, d. h. sie erhält den entgegengesetzten Werth, wenn irgend zwei Nummern der Elemente vertauscht werden, und verschwindet identisch, wenn zwei Nummern einander gleich sind*.

Beweis. Wenn S_1 die Formel bedeutet, welche aus S durch Vertauschung der Nummern i und k entspringt, so ist S_1^2 die Determinante, welche aus R durch Vertauschung derselben Nummern hervorgeht. Nun kommen i und k in R sowohl unter den ersten, als auch unter den zweiten Nummern vor, also wird R durch diese Vertauschung nicht verändert (§. 2, 4), d. h. $S_1^2 = S^2$. Zuzufolge dieser Identität sind die Glieder von S_1 den Gliedern von S der Reihe nach gleich und zwar von gleichen oder von entgegengesetzten Zeichen, je nachdem ein Glied von S_1 und das gleiche von S gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. Bedeutet nun $a_{ik}B$ das Aggregat der Glieder von S , in denen das Element a_{ik} vorkommt, so enthält B nur solche Elemente, deren Nummern von i und k verschieden sind*, folglich geht $a_{ik}B$ durch Vertauschung von i und k in $a_{ki}B$ über. Die Glieder $a_{ik}B$ in S und $a_{ki}B$ in S_1 sind entgegengesetzt gleich, weil $a_{ki} = -a_{ik}$, folglich sind auch S und S_1 entgegengesetzt gleich.

Wenn i und k einander gleich sind, so hat S_1 sowohl den Werth $-S$ als auch den Werth S , d. h. S verschwindet identisch.

* Die Formel S ist von JACOB (Crelle J. 2 p. 354, 29 p. 236) zum Gebrauch beim PFAFF'schen Integrationsproblem construiert und neuerlich von CAYLEY l. c. mit dem Namen Pfaffian belegt worden. Die Eigenschaften derselben hat JACOB ohne Beweis und ohne die fundamentale Relation $S^2 = R$ mitgetheilt.

4. Das mit dem Anfangsglied $a_{12} a_{34} \dots a_{n-1,n}$ beginnende Aggregat S , dessen Quadrat die Determinante R ist, wird nach JACOBI durch die Reihe aller Nummern der in dem Anfangsglied vorkommenden Elemente

$$(1, 2, 3, \dots, n,$$

unzweideutig bezeichnet. Nach dem bewiesenen Lehrsatz 3) ist

$$1, 2, 3, \dots, n = - (2, 1, 3, \dots, n = - (2, 3, \dots, n, 1 \text{ u. s. w.}$$

Daher hat man im Allgemeinen

$$\sqrt{R} = \pm (1, 2, \dots, n), \quad \sqrt{a_{ii}} = \pm (2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots, n).$$

Es ist aber nur dann auch dem Zeichen nach 2)

$$\sqrt{a_{ii}} \sqrt{a_{kk}} = a_{ik} \\ 1, 2, \dots, n = \sum a_{ii} \sqrt{a_{ii}}$$

wenn man die Zeichen der Wurzeln von den Nummern so abhängig macht, dass

$$\sqrt{a_{ii}} = (-1)^i (2, 3, \dots, i-1, i+1, \dots, n = (i+1, \dots, n, 2, \dots, i-1).$$

Hiernach gilt zur Entwicklung von $(1, 2, \dots, n)$ die Recursionsformel *)

$$(1, 2, \dots, n = a_{12} (3, \dots, n) + a_{13} (4, \dots, n, 2) + \dots \\ + a_{1i} (i+1, \dots, n, 2, \dots, i-1) + \dots + a_{1n} (2, \dots, n-1).$$

Beweis. Das Product $\sqrt{a_{ii}} \sqrt{a_{kk}}$ d. i. nach Voraussetzung

$$(-1)^{i+k} (2, \dots, i-1, i+1, \dots, n, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$$

ist identisch entweder mit a_{ik} oder mit $-a_{ik}$, weil $a_{ii} a_{kk} = a_{ik}^2$. Nach VANDERMONDE's Bezeichnung hat man (§. 3. 4)

$$a_{ik} = (-1)^{i+k} \left| \begin{array}{cccc} 2, & \dots, & i-1, & i+1, & \dots, & n \\ 2, & \dots, & & k-1, & k+1, & \dots, & n \end{array} \right|$$

In der Reihe der ersten Nummern fehlen 1 und i , in der Reihe der zweiten Nummern fehlen 1 und k . Werden die übrigen $n-3$ Nummern der Reihe $1, 2, \dots, n$ durch

$$p, q, r, s, \dots, u, v$$

bezeichnet, so erhält man aus

$$\left| \begin{array}{cccc} 2, & \dots, & i-1, & i+1, & \dots, & n \\ 2, & \dots, & & k-1, & k+1, & \dots, & n \end{array} \right|$$

* JACOBI und CAYLEY (l. c.) gebrauchen diese Identität als Definition von $(1, 2, \dots, n)$.

durch eine bestimmte Anzahl von Zeichenwechseln (§. 2, 4)

$$\begin{vmatrix} k, p, q, r, \dots, u, v \\ p, q, r, s, \dots, v, u \end{vmatrix}$$

Aus dem Product

$$(2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)(2, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

erhält man durch dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln (3)

$$k, p, q, r, \dots, u, v \quad p, q, r, s, \dots, v, u$$

Nun stimmt das Anfangsglied jener Determinante

$$a_{kp} a_{pq} a_{qr} a_{rs} \dots a_{uv} a_{vi}$$

mit dem Anfangsglied dieses Products

$$a_{kp} a_{qr} \dots a_{uv} a_{pq} a_{rs} \dots a_{vi}$$

auch dem Zeichen nach überein. Also hat unter der gemachten Voraussetzung $\{ \alpha_{ii} \} \alpha_{kk}$ den Werth α_{ik} , nicht $-\alpha_{ik}$, w. z. b. w.

Durch $i-2$ cyclische Vertauschungen findet man

$$\{ \alpha_{ii} = (-1)^{i-2} (2, \dots, i-1, i+1, \dots, n) = (i+1, \dots, n, 2, \dots, i-1) .$$

Beispiele.

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{44} = (1, 2, 3, 4)^2$$

$$(1, 2, 3, 4) = a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} .$$

$$\Sigma \pm a_{11} \dots a_{66} = (1, 2, \dots, 6)^2$$

$$(1, 2, \dots, 6) = a_{12} (3, 4, 5, 6) + a_{13} (4, 5, 6, 2) + \dots + a_{16} (2, 3, 4, 5)$$

$$= a_{12} a_{34} a_{56} + a_{12} a_{45} a_{64} + a_{12} a_{36} a_{45}$$

$$+ a_{13} a_{45} a_{62} + a_{13} a_{46} a_{25} + a_{13} a_{42} a_{56}$$

$$+ a_{14} a_{56} a_{23} + a_{14} a_{52} a_{36} + a_{14} a_{53} a_{62}$$

$$+ a_{15} a_{62} a_{34} + a_{15} a_{63} a_{42} + a_{15} a_{64} a_{23}$$

$$+ a_{16} a_{23} a_{45} + a_{16} a_{24} a_{53} + a_{16} a_{25} a_{34} .$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & f & e \\ -b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad - be + cf)^2 .$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b & c \\ -a & 0 & f & e \\ b & -f & 0 & d \\ -c & -e & -d & 0 \end{vmatrix} = (ad + be + cf)^2 .$$

5. Um den Coefficienten des Elements a_{ik} in der Formel

$$S = 1, 2, \dots, n$$

zu finden, bildet man

$$\begin{aligned} -1, i-1, S &= (i, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ &= a_{i1} (2, \dots, i-1, i+1, \dots, n) + a_{i2} (3, \dots, 1, \dots, \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man den gesuchten Coefficienten

$$-1, i-1, k+1, \dots, k-1 \text{ ohne } i \text{ und } k.$$

Derselbe Coefficient kann auch wie §. 3, 12 durch

$$\frac{\partial S}{\partial a_{ik}}$$

ausgedrückt werden. Die Summe

$$a_{i1} \frac{\partial S}{\partial a_{k1}} + a_{i2} \frac{\partial S}{\partial a_{k2}} + \dots + a_{in} \frac{\partial S}{\partial a_{kn}}$$

hat den Werth S oder 0 , je nachdem i und k übereinstimmen oder nicht*). Denn in dem zweiten Falle entspringt die Summe dadurch, dass in $1, \dots, n$ die Nummer i für k gesetzt wird, wobei $(1, \dots, n)$ verschwindet †).

Der Differentialquotient $\frac{\partial S}{\partial a_{kk}}$ ist an sich 0 .

6. Sind die Elemente der Determinante R so beschaffen, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = z,$$

so ist zufolge der oben (§. 4, 2) gezeigten Entwicklung

$$R = z^n + z^{n-2} \sum D_2 + z^{n-4} \sum D_4 + \dots,$$

wenn

$$D_m = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & \dots \\ a_{ki} & a_{kk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

eine partielle Determinante m ten Grades ist, deren Elemente den Bedingungen

$$a_{rs} = -a_{sr}, \quad a_{rr} = 0$$

*) JACOBI l. c.

**) CAYLEY l. c. Vergl. Crelle J. 50 p. 299.

unterliegen, und ΣD_m die Summe der Determinanten bedeutet, welche aus D_m entspringen, indem für i, k, \dots alle Combinationen von je m aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ gesetzt werden.

Für ungerade m verschwindet D_m §. 3. 13, für gerade m ist

$$D_m = (i, k, \dots)^2,$$

also ΣD_m die Summe von $\binom{n}{m}$ Quadraten.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & z \end{vmatrix} = z^3 + z(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2).$$

$$\begin{vmatrix} z & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & z & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & z & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & z \end{vmatrix} = z^4 + z^2(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 \\ + a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{24}^2).$$

Zweiter Abschnitt.

Anwendungen der Determinanten.

§. 8. Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen.

1. Wenn u_1, \dots, u_n homogene lineare Functionen der Variablen x_1, \dots, x_n sind, nämlich

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ u_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

so heisst die Determinante n ten Grades der Coefficienten

$$R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$$

die Determinante des Systems von linearen Functionen u_1, \dots, u_n .

Wenn die Determinante R nicht verschwindet, so gehört zu jedem System von endlichen Werthen u_1, \dots, u_n ein bestimmtes System von endlichen Werthen x_1, \dots, x_n . Man findet

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} x_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & u_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & u_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

indem man in R die k te Colonne mit x_k multiplicirt, und dann die übrigen der Reihe nach mit x_1, x_2, \dots multiplicirten Columnen zur k ten Colonne addirt (§. 3, 6).

Bezeichnet man den Coefficienten des Elements u_{ik} in R durch α_{ik} , so erhält man

$$Rx_k = \alpha_{1k} u_1 + \dots + \alpha_{nk} u_n.$$

Von der Summe $\alpha_{1k} u_1 + \dots + \alpha_{nk} u_n$ bleibt in der That nur das Glied Rx_k übrig, weil $\alpha_{1k} u_1 + \dots + \alpha_{nk} u_n$ den Werth 0 oder R hat, je nachdem i von k verschieden ist oder nicht (§. 3, 3).

Anmerkung. Wenn r eine andre gegebene homogene lineare Function von x_1, \dots, x_n bedeutet, so lassen sich bestimmte Multiplicatoren C_1, \dots, C_n angeben von der Art, dass

$$C_1 u_1 + \dots + C_n u_n = Rr$$

eine Identität wird.

2. Die Auflösung des vorhin betrachteten linearen Systems kann auf die Auflösung des Systems von n linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} u_{10} x_0 + u_{11} x_1 + \dots + u_{1n} x_n &= 0 \\ &\vdots \\ u_{n0} x_0 + u_{n1} x_1 + \dots + u_{nn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

gegründet werden, indem man $x_k : x_0$ für x_k oder $x_0 = 1$ setzt.

Man bilde nach Hinzunahme einer willkürlichen Hilfs-gleichung

$$u_{00} x_0 + u_{01} x_1 + \dots + u_{0n} x_n = 0$$

die Determinante $(n+1)$ ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & \dots & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n0} & u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

und bezeichne den Coefficienten des Elements u_{0k} in S durch R_k .

Multipliziert man die erste Colonne in S mit x_0 , und addirt man zur ersten Colonne die übrigen der Reihe nach mit x_1, x_2, \dots multiplicirten Colonnen, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne. Mithin verschwindet Sx_0 , und da x_0 nicht verschwindet, so ist $S = 0$.

² Diese Auflösung wurde zuerst von LIEBOWITZ angegeben, später von GRAMER neu erfunden. Vergl. §. 4 und §. 2.

Weil nun $a_{i0} R_0 + a_{i1} R_1 + \dots + a_{in} R_n$ nicht nur für $i = 1, 2, \dots, n$ (§. 3, 3), sondern auch für $i = 0$ verschwindet, so hat man

$$x_0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n = R_0 : R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

zur Bestimmung von $x_k : x_0$ unter der Voraussetzung, dass die Grösse R_0 , welche mit der oben (I) durch R bezeichneten Determinante übereinstimmt, nicht verschwindet.

Anmerkung. Bezeichnet man den Coefficienten des Elements a_{ik} in R_0 durch α_{ik} , so ist

$$-R_k = \alpha_{1k} a_{10} + \dots + \alpha_{nk} a_{n0}.$$

Wenn aber R_0 verschwindet, so sind die Verhältnisse $\alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \dots$ von k unabhängig (§. 6, 5), folglich

$$\frac{R_k}{\alpha_{hk}} = \frac{R_1}{\alpha_{h1}} = \dots$$

$$R_1 : R_2 : R_3 : \dots = \alpha_{h1} : \alpha_{h2} : \alpha_{h3} : \dots$$

3. Auflösung des Systems (4) $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$.

I. Wenn die Determinante $R = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn}$ nicht verschwindet, so wird dem System nur durch die Werthe $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ genügt. Multiplicirt man die k te Colonne von R mit x_k , und addirt man zur k ten Colonne die mit x_1, x_2, \dots multiplicirten übrigen Columnen, so findet man für Rx_k eine Determinante, deren k te Colonne verschwindende Elemente hat. Daher ist $Rx_k = 0$, folglich $x_k = 0$, weil R nicht verschwindet.

II. Wenn eine partielle Determinante $(n-1)$ ten Grades nicht verschwindet und die Determinante R verschwindet, so wird dem System der Gleichungen durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : \dots : x_n = \alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \dots : \alpha_{in}^*)$$

genügt, in welcher α_{ik} den Coefficienten des Elements a_{ik} in R und i eine beliebige Nummer bedeutet. Denn die Summe

$$a_{k1} \alpha_{i1} + \dots + a_{kn} \alpha_{in}$$

verschwindet für irgend welche Nummern i und k aus der Reihe

*) JACOBI Det. 7. Die Gleichung $R = 0$ heisst nach BEZOUT Hist. de l'Acad. de Paris 1764 p. 288 die Resultante der linearen Gleichungen $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$.

1, 2, ..., n §. 3. 3). Das System der Gleichungen $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ ist einfach unbestimmt. Die Werthe von x_1, x_2, \dots , welche $n-1$ beliebigen Gleichungen des Systems genügen, genügen auch der letzten Gleichung des Systems.

III. Wenn eine partielle Determinante m ten Grades nicht verschwindet z. B. $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{mm}$, und die partialen Determinanten der höhern Grade verschwinden*, so ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{1n} x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{m,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{mn} x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{im} & a_{i,m+1} x_{m+1} + \dots + a_{in} x_n \end{vmatrix} = 0$$

als Summe von $n-m$ partialen Determinanten ($m+1$ ten Grades, welche nach der Voraussetzung einzeln verschwinden. Bezeichnet man die Coefficienten, welche die Elemente der letzten Zeile in der verschwindenden Determinante haben, der Reihe nach durch p_1, p_2, \dots, p_m, p , so hat man II)

$$x_1 : x_2 : \dots : x_{m+1} = p_1 : p_2 : \dots : p_m : p.$$

Die Grössen p_1, p_2, \dots sind von i unabhängige homogene lineare Functionen von x_{m+1}, \dots, x_n . Also genügen die den Gleichungen $u_1 = 0, \dots, u_m = 0$ genügenden Werthe von x_1, \dots, x_m auch jeder andern Gleichung des gegebenen Systems, und das gegebene System ist $n-m$ fach unbestimmt.

4. Bei besondrer Beschaffenheit der Coefficienten giebt es besondre Methoden zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen.

Wenn die Coefficienten des in (1) betrachteten Systems von der Art sind, dass

$$a_{kk} = -a_{kk}, \quad a_{ii} = 0,$$

und wenn n gerade ist, so hat man nach den Sätzen und Bezeichnungen von §. 7 die Auflösung**

$$\begin{aligned} -1^{k-1} (1, 2, \dots, n-x_k) &= u_1 (2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) + u_2 (3, \dots, k-1, k+1, \dots, n, 1) \\ &+ \dots + u_n (1, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

* Die Behandlung dieses Falls und die Ermittlung seiner Bedingungen §. 4, 7 verdankt man KRONCKER.

** JACOBI Crelle J. 2 p. 356

Multiplieirt man nämlich die gegebenen Gleichungen der Reihe nach mit

$$(2, \dots, k-1, k+1, \dots, n, \dots, (3, \dots, k-1, k+1, \dots, n, 1, \dots, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1)$$

und addirt die erhaltenen Gleichungen, so bekommt x_k den Coefficienten

$$a_{1k}(2, \dots, n) + a_{2k}(3, \dots, n, 1) + \dots + a_{nk}(1, \dots, n-1),$$

dessen Werth durch

$$= (k, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

dargestellt werden kann (§. 7, 4). Indem man noch k mit $1, 2, \dots, k-1$ vertauscht, erhält man für den gesuchten Coefficienten (§. 7, 3)

$$= (-1)^{k-1} (1, 2, \dots, n).$$

Dagegen hat x_i in der erhaltenen Summe den Coefficienten

$$= (i, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n),$$

welcher identisch verschwindet.

5. Wenn die Coefficienten des linearen Systems von der Art sind, dass

$$a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0$$

und n ungerade ist, so ist $R = 0$ (§. 3, 13), und den gegebenen Gleichungen wird im Allgemeinen nur durch unendliche Werthe von x_1, x_2, \dots genügt, welche zu einander bestimmte Verhältnisse haben (2, Anm.).

Wenn jedoch die partialen Determinanten $n-1$ ten Grades a_{1k}, a_{2k}, \dots deren Verhältnisse zu einander von k unabhängig sind (§. 6, 3), und die Werthe u_1, u_2, \dots der Bedingung

$$u_1 a_{1k} + u_2 a_{2k} + \dots + u_n a_{nk} = 0$$

genügen, so ist wenigstens eine Gleichung des Systems überflüssig und das System der übrigen Gleichungen nach 1 auflösbar.

Vermöge der Identität (§. 7, 4)

$$a_{ik} = (i+1, \dots, n, 1, \dots, i-1, k+1, \dots, n, 1, \dots, k-1)$$

reducirt sich jene Bedingung auf

$$u_1(2, \dots, n) + u_2(3, \dots, n, 1) + \dots + u_n(1, \dots, n-1) = 0^*.$$

* J. JACOBI l. c.

Beispiel. Unter den Gleichungen

$$\begin{aligned} cy - bz &= f \\ -cx + az &= g \\ bx - ay &= h \end{aligned}$$

folgt eine aus den beiden andern, wenn

$$af + bg + ch = 0,$$

ausserdem wird denselben durch unendliche Werthe von x, y, z genügt, die sich zu einander wie $a : b : c$ verhalten, vorausgesetzt dass keine der Grössen a, b, c verschwindet.

Andere lineare Systeme von besonderer Art werden unten (§. 10) aufgelöst.

§. 9. Lehrsätze über die linearen Differentialgleichungen.

1. Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung n ter Ordnung, welche kein von der Function unabhängiges Glied enthält, lassen sich, wie LIEBOWITZ*) bemerkt hat, aus n particulären Integralen derselben in ähnlicher Weise zusammensetzen, wie die Coefficienten einer algebraischen Gleichung aus den Wurzeln derselben. Wenn nämlich y_1, y_2, \dots, y_n particuläre Integrale der linearen Differentialgleichung

$$0 = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)}$$

bedeuten, worin $y^{(i)}$ der i te Differentialquotient der Function y und die Grössen a_0, a_1, \dots, a_n von y, y', \dots unabhängig sind, so bilde man die 1ten, 2ten, \dots , n ten Differentialquotienten von y_1, y_2, \dots und die Determinante

$$R_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_{11} & \dots & y_{1,n-1} \\ y_2 & y_{21} & \dots & y_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_{n1} & \dots & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

worin y_{ik} den k ten Differentialquotienten von y_i bedeutet. Wird

* Crelle J. 10 p. 189. Die Coefficienten sind von LIEBOWITZ durch ein weniger einfaches Verfahren dargestellt worden. Den directen Weg zu ihrer Bestimmung hat LIEBOWITZ zwar angedeutet, aber nicht eingeschlagen.

nen der Coefficient von y_{ik} in R_n durch $r_{ik} = \frac{\partial R_n}{\partial y_{ik}}$ (§. 3, 12) bezeichnet, so erhält man

$$-R_n \frac{a_i}{a_n} = y_{1n} r_{1i} + y_{2n} r_{2i} + \dots + y_{nn} r_{ni}.$$

Beweis. Nach den Voraussetzungen hat man zur Bestimmung der Coefficienten a_0, a_1, \dots, a_n das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 y_1 + a_1 y_{11} + \dots + a_{n-1} y_{1,n-1} &= -a_n y_{1n} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0 y_n + a_1 y_{n1} + \dots + a_{n-1} y_{n,n-1} &= -a_n y_{nn}, \end{aligned}$$

durch dessen Auflösung (§. 8, 1) der für a_i gegebene Werth gefunden wird. Die Bestimmung der Coefficienten wird unvollkommen, wenn die gegebenen particulären Integrale so von einander abhängen, dass $R_n = 0$.

2. Die Determinante R_n lässt sich durch die Coefficienten von $y^{(n-1)}$ und $y^{(n)}$ ausdrücken. Unter den angegebenen Voraussetzungen ist

$$-R_n \frac{a_{n-1}}{a_n} = y_{1n} r_{1,n-1} + \dots + y_{nn} r_{n,n-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hat den Werth $\frac{dR_n}{dx}$ (§. 3, 45), folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{d \log R_n}{dx} &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \log R_n = -\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx, \\ R_n &= e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx} \quad (**). \end{aligned}$$

3. Die Integration der linearen Differentialgleichung n ter Ordnung

$$(I) \quad a = a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)},$$

worin a, a_0, a_1, \dots von y, y', \dots unabhängig sind, lässt sich auf die Integration einer linearen Differentialgleichung $(n-m)$ ter

*) BRIOSCHI Det. p. 81.

**) ABEL Crelle J. 2 p. 22 hat diese Relation für $n=2$ aufgestellt. Die allgemeine Formel wird LIOUVILLE zugeschrieben TISSOT Liouv. J. 47 p. 478.

$$\begin{aligned}
b_{11} y_1 &+ \dots + b_{m1} y_m &= 0 \\
b_{11} y_{11} &+ \dots + b_{m1} y_{m1} &= 0 \\
&\dots & \\
b_{11} y_{1,m-2} &+ \dots + b_{m1} y_{m,m-2} &= 0
\end{aligned}$$

durch welche die Verhältnisse $b_{11} : b_{21} : b_{31} : \dots$ bestimmt werden (§. 8, 3). Ferner erhält man

$$y^{(m)} = b_1 y_{1m} + \dots + b_m y_{mm} + z,$$

wo

$$b_{11} y_{1,m-1} + \dots + b_{m1} y_{m,m-1} = z,$$

eine bestimmte Function von x . Ebenso ist

$$y^{(m+1)} = b_1 y_{1,m+1} + \dots + b_m y_{m,m+1} + z' + z_1$$

wenn

$$b_{11} y_{1m} + \dots + b_{m1} y_{mm} = z_1, \quad \frac{dz}{dx} = z',$$

$$y^{(m+2)} = b_1 y_{1,m+2} + \dots + b_m y_{m,m+2} + z'' + z_{11} + z_2$$

wenn

$$b_{11} y_{1,m+1} + \dots + b_{m1} y_{m,m+1} = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = z_{11},$$

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= b_1 y_{1n} + \dots + b_m y_{mn} + z^{(n-m)} \\
&\quad + z_{1,n-m-1} + \dots + z_{n-m-1,1} + z_{n-m}
\end{aligned}$$

wenn

$$b_{11} y_{1,n-1} + \dots + b_{m1} y_{m,n-1} = z_{n-m}.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit a_0, a_1, \dots multiplicirt und dann addirt, so findet man vermöge der über y_1, y_2, \dots, y_m gemachten Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
a &= a_m z + a_{m+1} z' + a_{m+2} z'' + \dots + a_n z^{(n-m)} \\
&\quad + a_{m+1} z_1 + a_{m+2} z_{11} + \dots + a_n z_{1,n-m-1} \\
&\quad \quad + a_{m+2} z_2 + \dots + a_n z_{2,n-m-2} \\
&\quad \quad \quad \dots \\
&\quad \quad \quad + a_n z_{n-m}
\end{aligned}$$

als Bedingung, unter welcher $b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$ ein Integral der Gleichung (1) ist.

Durch Auflösung des Systems von Gleichungen

$$\begin{aligned}
b_{11} y_1 &+ \dots + b_{m1} y_m &= 0 \\
b_{11} y_{11} &+ \dots + b_{m1} y_{m1} &= 0 \\
&\dots & \\
b_{11} y_{1,m-2} &+ \dots + b_{m1} y_{m,m-2} &= 0 \\
b_{11} y_{1,m-1} &+ \dots + b_{m1} y_{m,m-1} &= z
\end{aligned}$$

findet man aber (§. 8, 4)

$$b_{i1} R_m = \eta_{i,m-1} z, \quad b_i = \int \frac{\eta_{i,m-1}}{R_m} z dx,$$

wenn

$$R_m = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y_{11} & y_{21} & \dots & y_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,m-1} & y_{2,m-1} & \dots & y_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

und

$$\eta_{i,m-1} = \frac{\partial R_m}{\partial y_{i,m-1}}$$

der Coefficient von $y_{i,m-1}$ in R_m ist. Die Functionen b_1, b_2, \dots, b_m sind also durch Quadraturen bestimmt, nachdem z gefunden ist.

Um nun die Gleichung, wodurch z bestimmt ist, frei von b_1, b_2, \dots darzustellen, bemerke man

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11} y_{1m} + \dots + b_{m1} y_{mm} \\ &= \eta_{1,m-1} y_{1m} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{mm} \frac{z}{R_m} = c_1 z \\ z_2 &= b_{11} y_{1,m+1} + \dots + b_{m1} y_{m,m+1} \\ &= \eta_{1,m-1} y_{1,m+1} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{m,m+1} \frac{z}{R_m} = c_2 z \\ z_{n-m} &= b_{11} y_{1,n-1} + \dots + b_{m1} y_{m,n-1} \\ &= \eta_{1,m-1} y_{1,n-1} + \dots + \eta_{m,m-1} y_{m,n-1} \frac{z}{R_m} = c_{n-m} z, \end{aligned}$$

wodurch c_1, c_2, \dots, c_{n-m} gegebene Functionen von x sind. Daher findet man durch Differentiation bei analoger Bezeichnung

$$\begin{aligned} z_{i1} &= c_{i1} z + c_i z' \\ z_{i2} &= c_{i2} z + 2 c_{i1} z' + c_i z'' \\ z_{i3} &= c_{i3} z + 3 c_{i2} z' + 3 c_{i1} z'' + c_i z''' \\ &\vdots \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} a &= a_m z \\ &+ a_{m+1} (c_1 z + z') \\ &+ a_{m+2} \left(c_{11} z + c_1 z' + z'' \right. \\ &\quad \left. + c_2 z \right) \\ &+ a_{m+3} \left(c_{12} z + 2 c_{11} z' + c_1 z'' + z''' \right. \\ &\quad \left. + c_{21} z + c_2 z' \right. \\ &\quad \left. + c_3 z \right) \\ &+ a_{m+4} \left(c_{13} z + 3 c_{12} z' + 3 c_{11} z'' + c_1 z^{(3)} + z^{(4)} \right. \\ &\quad \left. + c_{22} z + 2 c_{21} z' + c_2 z'' \right. \\ &\quad \left. + c_{31} z + c_3 z' \right. \\ &\quad \left. + c_4 z \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

die lineare Gleichung $(m-n)$ ter Ordnung, welcher die Function z zu genügen hat. Aus dem Werth von z lassen sich dann die Functionen b_1, b_2, \dots, b_m berechnen, so dass

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

ein Integral der Gleichung (I) wird. Da in den particulären Integralen y_1, y_2, \dots, y_m nach üblicher Voraussetzung unbestimmte Constanten nicht vorkommen, da ferner das allgemeine Integral z der zuletzt gefundenen linearen Gleichung $n-m$ unbestimmte Constanten enthält, und durch m Quadraturen bei der Berechnung von b_1, b_2, \dots, b_m andere m unbestimmte Constanten entstehen, so hat das gefundene Integral der Gleichung (I) die erforderliche Anzahl von n unbestimmten Constanten, wodurch es als das allgemeine Integral der Gleichung (I) erscheint.

4. Die lineare Differentialgleichung, welche zur Integration der gegebenen Differentialgleichung zu lösen übrig bleibt, ist im Allgemeinen nicht lösbar, wenn sie die erste Ordnung übersteigt. Also kommen besonders die Fälle $m = n$ und $m = n - 1$ in Betracht.

Für $m = n$ wird

$$a = a_n z, \quad b_{i1} R_n = \frac{a}{a_n} \eta_{i,n-1},$$

$$b_i = \int \frac{a}{a_n} \frac{\eta_{i,n-1}}{R_n} dx,$$

folglich ist das allgemeine Integral der Gleichung (I)

$$y = y_1 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{1,n-1} dx + y_2 \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{2,n-1} dx + \dots + y_n \int \frac{a}{a_n R_n} \eta_{n,n-1} dx,$$

wie LAGRANGE und JOACHIMSTHAL a. a. O. bemerkt haben.

Für $m = n - 1$ wird $a = a_{n-1} z + a_n (c_1 z + z')$. Nun ist (§. 3, 15.)

$$R_{n-1} c_1 = \eta_{1,n-2} y_{1,n-1} + \dots + \eta_{n-1,n-2} y_{n-1,n-1} = \frac{dR_{n-1}}{dx},$$

folglich

$$a R_{n-1} = a_{n-1} R_{n-1} z + a_n \frac{dR_{n-1}}{dx} z.$$

Zur Auflösung dieser Gleichung bedarf man eines particulären Integrals u_1 der Gleichung $0 = a_{n-1} u + a_n u'$, nämlich

$$u_1 = e^{-\int \frac{a_{n-1}}{a_n} dx}.$$

Setzt man nun das zunächst gesuchte allgemeine Integral

$$R_{n-1} z = u_1 v_1,$$

folglich nach der angenommenen Bezeichnung

$$(R_{n-1} z)' = u_{11} v_1 + u_1 v_{11},$$

so erhält man, weil nach Voraussetzung $a_{n-1} u_1 + a_n u_{11} = 0$ ist,

$$a R_{n-1} = a_n u_1 v_{11}, \quad v_1 = \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx,$$

$$R_{n-1} z = u_1 \int \frac{a R_{n-1}}{a_n u_1} dx$$

mit einer unbestimmten Constante. Zur Bestimmung von b_i hat man endlich

$$b_{i1} R_{n-1} = \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}} \eta_{i,n-2}$$

$$b_i = \int \frac{u_1 v_1}{R_{n-1}^2} \eta_{i,n-2} dx$$

mit je einer neuen unbestimmten Constante, so dass

$$y = b_1 y_1 + \dots + b_{n-1} y_{n-1}$$

das allgemeine Integral der Gleichung (I) ist, wie JOACHIMSTHAL (l. c.) bemerkt hat. Den besondern Fall $a = 0$, in welchem v_1 selbst zur unbestimmten Constante wird, hatte MALMSTEN (l. c.) früher analog behandelt.

§. 10. Product aller Differenzen von gegebenen Grössen.

1. Wenn man in der Reihe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jede von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\frac{1}{2} n(n-1)$ Differenzen, deren Product

$$\begin{aligned} & (\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1, \dots, \alpha_n - \alpha_1) \\ & (\alpha_3 - \alpha_2, \dots, \alpha_n - \alpha_2) \\ & \dots \dots \dots \\ & (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

durch $\mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ bezeichnet wird. Dieses Product reducirt

sich auf eine Determinante n ten Grades, deren Zeilen geometrische Progressionen enthalten, nämlich *)

$$J(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Beweis. Das Product J ist alternirend §. 1. 4. Wenn nun $a_1^a a_2^b a_3^c \dots$ ein Glied von J ist, so ist $a_2^a a_1^b a_3^c \dots$ ein Glied von $-J$, folglich $-a_2^a a_1^b a_3^c \dots$ ein Glied von J . Diese beiden Glieder von J sind entgegengesetzt gleich, wenn die Exponenten a und b einander gleich sind. Also braucht man, um alle Glieder des Products zu bilden, für die Exponenten a, b, c, \dots nur verschiedene Zahlen zu setzen, und zwar Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, n-1$, weil kein Exponent den Werth n erreichen kann. Die Glieder, welche aus

$$a_1^0 a_2^1 a_3^2 \dots a_n^{n-1}$$

durch gegenseitige Vertauschung der Exponenten entspringen, lassen sich auch durch gegenseitige Vertauschung der Dignanden ableiten, und sind daher Glieder von J oder von $-J$, d. h. positive oder negative Glieder von J , je nachdem sie durch Permutationen der einen oder der andern Classe entstanden. Also ist das Product J von der Determinante

$$\Sigma \pm a_1^0 a_2^1 \dots a_n^{n-1}$$

nicht verschieden (§. 2, 2).

Von allen $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Gliedern des Products bleiben nur $1, 2, \dots, n$ übrig, also

bei 3 Grossen	6	statt	8
» 4	24	»	64
» 5	120	»	1024 u. s. w.

*) CAUCHY J. de l'ec. polyt. Cah. 17 p. 48. Analyse algebr. III 2 und Note IV. JACOBI Crelle J. 22 p. 360. Das Product der Differenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung war von WARING, LAGRANGE, VANDERMONDE befrachtet worden. Bei dem Letztern findet man den besondern Fall des obigen Satzes

$$(b - a)(c - a)(c - b) = ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

Beispiel.

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \quad \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 \quad \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1 \beta_1 & \beta_1^2 \\ \alpha_2^2 & \alpha_2 \beta_2 & \beta_2^2 \\ \alpha_3^2 & \alpha_3 \beta_3 & \beta_3^2 \end{vmatrix}.$$

2. Jede ganze alternirende Function der Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ist durch das Product der Differenzen $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ theilbar^{*)}. Denn durch die gegenseitige Vertauschung von irgend zwei Variablen erhält die Function den entgegengesetzt gleichen Werth; daher verschwindet sie, wenn die beiden Variablen von einander sich nicht unterscheiden §. 2, 4; also ist sie durch die Differenz derselben, mithin durch das Product \mathcal{A} theilbar.

Der Quotient der ganzen alternirenden Function durch das Product der Differenzen ihrer Variablen ist je nach der Anzahl der Dimensionen entweder eine von den Variablen unabhängige Zahl, oder eine (permanent) symmetrische Function der Variablen.

Z. B. die Determinante $(1) \Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \dots \alpha_n^{n-1}$ ist eine ganze alternirende Function von ebensoviel Dimensionen als das Product \mathcal{A} . Der Quotient der Determinante durch das Product ist 1, weil das Anfangsglied der Determinante mit dem Anfangsglied des Products auch dem Zeichen nach übereinstimmt.

Andre Beispiele solcher Quotienten kommen im Folgenden vor. Die allgemeine Berechnung derselben ist von JACOBI Crelle A. 22 p. 363 gezeigt worden.

3. Wenn $q_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + \dots + a_{n-1,i}x^{n-1}$ ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} q_0 \alpha_1 & q_0 \alpha_2 & \dots & q_0 \alpha_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n-1} \alpha_1 & q_{n-1} \alpha_2 & \dots & q_{n-1} \alpha_n \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{n-1,0} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0,n-1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach der Multiplicationsregel (§. 3, 4).

^{*)} CAYLEY l. c. p. 46

Ist $\varphi_i(x)$ nur vom i ten Grade, d. h. $a_{ik} = 0$, wenn $k > i$, so reducirt sich die Determinante der Coefficienten auf ihr Anfangsglied, und man erhält *

$$\Sigma \pm q_0 a_1 \dots q_{n-1} a_n = a_{00} a_{11} \dots a_{n-1, n-1} \pm a_1 \dots a_n$$

Dem obigen Lehrsatz steht ein allgemeinerer zur Seite. Wenn

$$\begin{aligned} F(x, y) &= q_0 x + q_1 x y + \dots + q_{n-1} x y^{n-1} \\ &= \Sigma a_{ik} x^i y^k \end{aligned}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n-1$ setzt, so erhält man bei nochmaliger Anwendung der Multiplicationsregel **

$$\Sigma \pm F(\alpha_1, \beta_1, \dots, F(\alpha_n, \beta_n)) = \Sigma \pm a_{00} \dots a_{n-1, n-1} \pm a_1 \dots a_n \pm \beta_1 \dots \beta_n$$

4. Wenn man das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit dem Product aller Differenzen der Grössen β_1, \dots, β_n multiplicirt, so erhält man eine Determinante n ten Grades. Nach der Multiplicationsregel (§. 3, 4) ist

$$\begin{aligned} & \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \pm \Delta(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \beta_n & \dots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

wenn

$$c_{ik} = 1 + \alpha_i \beta_k + \alpha_i^2 \beta_k^2 + \dots + \alpha_i^{n-1} \beta_k^{n-1} = \frac{1 - \alpha_i^n \beta_k^n}{1 - \alpha_i \beta_k},$$

oder wenn

$$c_{ik} = \alpha_1^{i-1} \beta_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1} \beta_2^{k-1} + \dots + \alpha_n^{i-1} \beta_n^{k-1}.$$

Insbesondere ist

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix} = S_n$$

wenn

$$s_i = \alpha_1^i + \alpha_2^i + \dots + \alpha_n^i.$$

* BORCHARDT über eine Interpolationsformel. Abh. der Berl. Acad. 1860 p. 4

** BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1859 p. 378 und Crelle J. 57 p. 112.

*** CAUCHY Exerc. d'anal. 2 p. 169.

Denn in diesem Falle reducirt sich das Element c_{ik} der zu bildenden Determinante auf die Summe der $(i+k-2)$ ten Potenzen der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Allgemeiner hat man *

$$\Sigma [A \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \cdot & \cdot & s_{2m-2} \end{vmatrix} = S_m$$

wenn die Summe die sämtlichen $\binom{n}{m}$ Glieder umfasst, welche aus dem Anfangsglied $A \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ² dadurch entspringen, dass an die Stelle der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ je m verschiedene aus der Reihe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gesetzt werden. Denn unter Voraussetzung

$$c_{ik} = s_{i+k-2} = \alpha_1^{i-1} \alpha_1^{k-1} + \alpha_2^{i-1} \alpha_2^{k-1} + \dots + \alpha_n^{i-1} \alpha_n^{k-1}$$

ist die durch S_m bezeichnete Determinante in eine Summe von Quadraten zerlegbar §. 3, 2), nämlich

$$S_m = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma \left\{ \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdot & \cdot & \alpha_1^{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \cdot & \cdot & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}^2 \right\},$$

wobei das Summenzeichen die angegebene Bedeutung hat.

5. Ebenso wird die noch umfassendere Summe

$$\Sigma \{Z \alpha_1 Z \alpha_2 \cdot \cdot \cdot Z \alpha_m A \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}^2$$

durch die Determinante m ten Grades

$$T = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \cdot & \cdot & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdot & \cdot & t_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m-1} & t_m & \cdot & \cdot & t_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt **, wenn $Z \alpha_i$ gegeben ist, und

$$t_\mu = \alpha_1^\mu Z \alpha_1 + \dots + \alpha_n^\mu Z \alpha_n.$$

Setzt man insbesondere

$$\begin{aligned} Z \alpha_i &= b_i x - \alpha_i \\ u_\mu &= b_1 \alpha_1^\mu + \dots + b_n \alpha_n^\mu \end{aligned}$$

* J. CAYLEY Liouv. J. 11 p. 298 und BORCHARDT Liouv. J. 12 p. 58.

** JOACHIMSTHAL Crelle J. 48 p. 394 und BORCHARDT über eine Interpolationsformel p. 8.

so wird $l_\mu = u_\mu x - u_{\mu+1}$, und die Determinante T lässt sich in eine Determinante $(m+1)$ ten Grades transformiren, wie folgt *).

Nachdem man jede Colonne mit -1 multiplicirt hat, findet man (§. 2, 7)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & 1 \\ u_1 - u_0 x & u_2 - u_1 x & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ u_m - u_{m-1} x & u_{m+1} - u_m x & . & . & 0 \end{vmatrix}$$

Addirt man zur zweiten Zeile die mit x multiplicirte erste Zeile, so behält man in der zweiten Zeile

$$u_1 \quad u_2 \quad . \quad . \quad u_m \quad x \quad .$$

Wenn man diese mit x multiplicirt und zur dritten Zeile addirt, so behält man in der dritten Zeile

$$u_2 \quad u_3 \quad . \quad . \quad u_{m+1} \quad x^2 \quad .$$

u. s. f. Daher ist unter der Voraussetzung (I)

$$T = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & . & . & u_{m-1} & 1 \\ u_1 & u_2 & . & . & u_m & x \\ . & . & . & . & . & . \\ u_m & u_{m+1} & . & . & u_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}.$$

Setzt man ferner

$$\text{II} \quad \chi(\alpha_i) = b_i x - \alpha_i (y - \alpha_i)$$

so wird

$$l_\mu = u_{\mu+2} - u_{\mu+1} x - (u_{\mu+1} - u_\mu x) y$$

und die Determinante T kann in eine Determinante $(m+2)$ ten Grades transformirt werden. Man hat nämlich wie vorhin

$$\begin{aligned} T &= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & & u_2 - u_1 x & . & . \\ 0 & u_2 - u_1 x - (u_1 - u_0 x) y & & u_3 - u_2 x - u_2 - u_1 x y & . & . \\ 0 & u_3 - u_2 x - u_2 - u_1 x y & & u_4 - u_3 x - u_3 - u_2 x y & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & u_1 - u_0 x & . & . & u_m - u_{m-1} x \\ y & u_2 - u_1 x & . & . & u_{m+1} - u_m x \\ . & . & . & . & . \\ y^m & u_{m+1} - u_m x & . & . & u_{2m} - u_{2m-1} x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

*) Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 429.

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & u_0 & u_1 - u_0 \cdot x & & \\ y & u_1 & u_2 - u_1 \cdot x & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & x & & x^m \\ 1 & u_0 & u_1 & & u_m \\ y & u_1 & u_2 & & u_{m+1} \\ & & & & \\ y^m & u_m & u_{m+1} & & u_{2m} \end{vmatrix}$$

6. Die Determinante m ten Grades (4)

$$S_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m & \cdot & \cdot & s_{2m-2} \end{vmatrix} = \sum \{ \pm a_1 \cdot \cdot \cdot a_m \}^2$$

kann unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_0 \\ &= a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \cdot \cdot (x - \alpha_n) \end{aligned}$$

durch die Coefficienten von $f(x)$ ausgedrückt werden. Man bilde aus den $m-2$ Zeilen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und aus den m folgenden Zeilen

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2m-3} \\ s_1 & s_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

ein System von $2m-2$ Elementen, dessen Determinante von S_m nicht verschieden ist (§. 2, 6). Die Columnen dieses Systems werden transformirt, die erste, indem man sie mit a_n multiplicirt; die zweite, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1} multiplicirte erste Columnne addirt; die dritte, indem man sie mit a_n multiplicirt und zu ihr die mit a_{n-1} , a_{n-2} multiplicirte 2te, 1te Columnne addirt; u. s. f. Dadurch entsteht das System der $m-2$ Zeilen

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_n & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und der $m-1$ folgenden Zeilen, die mit $m-2, m-3, \dots$ Nullen anfangen,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & . & . & 0 & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & . \\ 0 & . & . & a_n s_0 & a_n s_1 + a_{n-1} s_0 & a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

und der Schlusszeile

$$a_n s_1 \quad a_n s_2 + a_{n-1} s_1 \quad a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 \quad . \quad . \quad .$$

Die Determinante dieses Systems hat den Werth $a_n^{2m-2} S_m$ (§. 3, 4, 6), und die Elemente können mit Hilfe der NEWTON'schen Identitäten *)

$$\begin{aligned} a_n s_0 &= n a_n \\ a_n s_1 + a_{n-1} s_0 &= (n-1) a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + a_{n-2} s_0 &= (n-2) a_{n-2} \\ . & \end{aligned}$$

reducirt werden. Für die Schlusszeile hat man, weil $s_0 = n$ ist,

$$\begin{aligned} a_n s_1 &= - a_{n-1} \\ a_n s_2 + a_{n-1} s_1 &= - 2 a_{n-2} \\ . & \end{aligned}$$

Demnach findet man

$$- a_n^{2m-2} S_m = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & . \\ 0 & a_n & a_{n-1} & . & . \\ 0 & 0 & a_n & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & n a_n & (n-1) a_{n-1} & . & . \\ n a_n & (n-1) a_{n-1} & (n-2) a_{n-2} & . & . \\ a_{n-1} & 2 a_{n-2} & 3 a_{n-3} & . & . \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(2m-2)$ ten Grades, bei welcher die $m-2$ ersten und die $m-1$ folgenden Zeilen in Bezug auf die nicht verschwindenden Elemente übereinstimmen. Insbesondere ist

$$- a_n^2 S_2 = \begin{vmatrix} n a_n & (n-1) a_{n-1} \\ a_{n-1} & 2 a_{n-2} \end{vmatrix}$$

*) NEWTON Arithm. univers. ed. 's Gravesande p. 492. Man leitet dieselben am einfachsten aus der Identität der beiden für $\frac{f'(x)}{f(x)}$ sich darbietenden Ausdrücke ab.

$$- a_n^4 S_3 = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & (n-3)a_{n-3} \\ a_{n-1} & 2a_{n-2} & 3a_{n-3} & 4a_{n-4} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

7. Das Quadrat des Products von allen Differenzen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$S_n = .f \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n^2$$

kann durch Werthe des Differentialquotienten der Function

$$f(x) = a_n x - \alpha_1, x - \alpha_2, \dots, x - \alpha_n$$

ausgedrückt werden. Man hat nämlich

$$\begin{aligned} f' \alpha_1 &= a_n - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n \\ f' \alpha_2 &= (\alpha_2 - \alpha_1) - a_n - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_n \\ f' \alpha_3 &= (\alpha_3 - \alpha_1) - (\alpha_3 - \alpha_2) - a_n - \dots - \alpha_n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

folglich *)

$$f' \alpha_1 \dots f' \alpha_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^n .f \alpha_1, \dots, \alpha_n^2.$$

Ebendaher findet man für $m < n$

$$f' \alpha_1 \dots f' \alpha_m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_n^m .f \alpha_1, \dots, \alpha_m^2 P,$$

wenn durch P das Product aller Differenzen der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ von den Grössen (Subtrahenden) $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ bezeichnet wird.

Beispiel. Wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die n ten Wurzeln von 1 sind, so ist

$$f(x) = x^n - 1, \quad f'x = nx^{n-1}, \quad \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^{n-1},$$

$$.f \alpha_1, \dots, \alpha_n^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n.$$

Und wenn $\alpha_n = 1$, so hat man

$$.f \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}^2 = \frac{.f \alpha_1, \dots, \alpha_n^2}{f' \alpha_n^2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^{n-2}.$$

*) CAUCHY J. de l'éc. polyt. Cah. 47 p. 485.

8. In der Determinante n ten Grades

$$P = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & . & . & \alpha_1^{n-2} & u_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & \alpha_n & . & . & \alpha_n^{n-2} & u_n \end{vmatrix}$$

hat das Element u_i den Coefficienten

$$-1^{i-n-i} \cdot 1 (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$

wie sich ergibt, indem man die i te Zeile zur Schlusszeile macht (§. 3, 1). Nach der angegebenen Bezeichnung ist

$$1 (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \frac{1 (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\alpha_i - \alpha_1 \dots \alpha_i - \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} - \alpha_i \dots \alpha_n - \alpha_i}$$

Bildet man nun

$$f' z = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \\ f' \alpha_i = (\alpha_i - \alpha_1) \dots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \dots (\alpha_i - \alpha_n)$$

so findet man

$$-1^{i-n-i} \cdot 1 (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \frac{1 (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{f' (\alpha_i)}$$

und daher folgende Entwicklung der gegebenen Determinante

$$P = \left(\frac{u_1}{f' (\alpha_1)} + \dots + \frac{u_n}{f' (\alpha_n)} \right) \cdot 1 (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

9. Bezeichnet man durch P_r die Determinante, in welche P (8) übergeht, wenn α_i^r an die Stelle von u_i tritt, so hat man

$$\frac{\alpha_1^r}{f' (\alpha_1)} + \dots + \frac{\alpha_n^r}{f' (\alpha_n)} = \frac{P_r}{1 (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}.$$

Die Determinante P_r verschwindet, wenn die letzte Colonne mit einer der übrigen Columnen übereinstimmt. Also verschwindet die Summe der Quotienten für $r = 0, 1, \dots, n-2$.

Die Determinante P_r geht in das Product \mathcal{A} über, wenn $r = n-1$. Also hat für $r = n-1$ die Summe den Werth 1.

Die Determinante P_r ist eine ganze alternirende Function von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, mithin durch das Product \mathcal{A} theilbar (2). Also ist für $r > n-1$ die betrachtete Summe eine symmetrische ganze Function Q_r der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $r - n + 1$ Dimensionen.

*) CATCHY l. c. p. 497.

Wenn nun $q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ ist, so findet man aus

$$\begin{aligned} & a_0 \left(\frac{1}{f'(\alpha_1)} + \frac{1}{f'(\alpha_2)} + \dots + \frac{1}{f'(\alpha_n)} \right) \\ & + a_1 \left(\frac{\alpha_1}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2}{f'(\alpha_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{f'(\alpha_n)} \right) \\ & + a_2 \left(\frac{\alpha_1^2}{f'(\alpha_1)} + \frac{\alpha_2^2}{f'(\alpha_2)} + \dots + \frac{\alpha_n^2}{f'(\alpha_n)} \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

durch Addition der Columnen die Summe

$$\frac{q(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} + \dots + \frac{q(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$$

und durch Addition der Zeilen den Werth dieser Summe, der verschwindet, wenn der Grad von $q(x)$ geringer ist als $n-1$, der aber

$$a_n + a_{n+1} Q_{n+1} + \dots$$

beträgt, wenn $q(x)$ von einem höhern Grade ist *).

Anmerkung. Nach dem Fundamentalsatz über die gebrochenen rationalen Functionen ist

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - \alpha_1) f'(\alpha_1)} + \dots + \frac{1}{z - \alpha_n f'(\alpha_n)}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Identität nach fallenden Potenzen von z , so findet man

$$Q_r = \frac{\alpha_1^r}{f'(\alpha_1)} + \dots + \frac{\alpha_n^r}{f'(\alpha_n)}$$

als Coefficienten von z^{-r-1} **).

10. Durch Entwicklung der Determinante (1)

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der i ten Zeile erhält man (§. 3, 3)

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \delta_{i1} + \delta_{i2} \alpha_i + \dots + \delta_{in} \alpha_i^{n-1}.$$

*. Den ersten Theil dieses Satzes hatte EULER Calc. integr. II §. 4169 gegeben. Durch JACOBI Crelle J. 14 p. 281 ist der Satz auf Functionen von 2 Variablen ausgedehnt worden.

** JACOBI Disq. de tract. simpl. 1825 p. 5

12. Aus dem linearen System

$$\begin{aligned} x_1 &+ \dots + x_n &= 1 \\ x_1 \alpha_1 &+ \dots + x_n \alpha_n &= t \\ &\dots &\dots \\ x_1 \alpha_1^{n-1} &+ \dots + x_n \alpha_n^{n-1} &= t^{n-1} \end{aligned}$$

erhält man (§. 8, 1)

$$x_i \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \alpha_{i-1} & \dots & t & \dots & \alpha_{i+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \alpha_{i-1}^{n-1} & \dots & t^{n-1} & \dots & \alpha_{i+1}^{n-1} & \dots \end{vmatrix}$$

$$x_i \cdot t \alpha_1, \dots, \alpha_n = \cdot t \dots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \dots$$

Setzt man beiderseits das i te Element ans Ende, so bleibt übrig

$$x_i = \frac{f \cdot t}{t - \alpha_i f' \alpha_i} \cdot \dots$$

13. Aus dem allgemeineren linearen System

$$\begin{aligned} x_1 &+ \dots + x_n &= u_1 \\ x_1 \alpha_1 &+ \dots + x_n \alpha_n &= u_2 \\ &\dots &\dots \\ x_1 \alpha_1^{n-1} &+ \dots + x_n \alpha_n^{n-1} &= u_n \end{aligned}$$

findet man nach der angenommenen Bezeichnung (10)

$$\begin{aligned} x_i \cdot t \alpha_1, \dots, \alpha_n &= u_1 \delta_{i1} + \dots + u_n \delta_{in} \\ x_i f' \alpha_i &= u_1 C_{i,n-1} + u_2 C_{i,n-2} + \dots \dots \end{aligned}$$

In der That ist (11)

$$C_{i,n-1} + C_{i,n-2} z + C_{i,n-3} z^2 + \dots = \frac{f' z}{z - \alpha_i}$$

eine Function, welche für $z = \alpha_i$ auf $f' \alpha_i$ sich reducirt, während sie bei andern Werthen von z aus der Reihe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ verschwindet.

Anstatt der Grössen $C_{i,n-1}, C_{i,n-2}, \dots$ findet man, wenn

$$f(z) = z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_{n-1} z + C_n$$

* LAGRANGE Mémoires de Berlin 1775 p. 485. CACHY J. de l'école polyt. Cah. 47 p. 73.

** CACHY Anal. algebr. III, 1.

gegeben ist, andre Ausdrücke auf folgendem Wege *). Man bilde die Functionen

$$f_1 z = z + C_1$$

$$f_2 z = z^2 + C_1 z + C_2$$

$$f_3 z = z^3 + C_1 z^2 + C_2 z + C_3$$

u. s. w. Dann hat man, weil $z^k - t^k$ durch $z - t$ theilbar ist,

$$\frac{f z - f t}{z - t} = f_{n-1} z + t f_{n-2} z + \dots + t^{n-1}$$

und insbesondere, weil $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots$ verschwinden,

$$\frac{f z}{z - \alpha_1} = f_{n-1} z + \alpha_1 f_{n-2} z + \dots + \alpha_1^{n-1}$$

$$\frac{f z}{z - \alpha_2} = f_{n-1} z + \alpha_2 f_{n-2} z + \dots + \alpha_2^{n-1}$$

u. s. w. Aus diesem System erhält man vermöge der gegebenen Gleichungen

$$\begin{aligned} f z, \left\{ \frac{x_1}{z - \alpha_1} + \frac{x_2}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{z - \alpha_n} \right\} \\ = u_1 f_{n-1} z + u_2 f_{n-2} z + \dots + u_n. \end{aligned}$$

Demnach erscheinen x_1, x_2, \dots als die Zähler der Partialbrüche, in welche man die gebrochene Function

$$\frac{u_1 f_{n-1} z + u_2 f_{n-2} z + \dots + u_n}{f z}$$

zerlegen kann. Für $z = \alpha_i$ bleibt übrig

$$x_i f'(\alpha_i) = u_1 f_{n-1}(\alpha_i) + u_2 f_{n-2}(\alpha_i) + \dots + u_n.$$

Hienach sind die Ausdrücke $f_1(\alpha_i), f_2(\alpha_i), \dots$ gleichbedeutend mit den oben gegebenen C_{i1}, C_{i2}, \dots , und enthalten die Grösse α_i nicht, wie man bei ihrer Bildung bestätigt findet.

Wenn insbesondere $u_1 = 1, u_2 = t, u_3 = t^2, \dots$ ist, so wird

$$f_{n-1} z + t f_{n-2} z + \dots + t^{n-1} = \frac{f t - f z}{t - z}$$

$$f_{n-1}(\alpha_i) + t f_{n-2}(\alpha_i) + \dots + t^{n-1} = \frac{f t}{t - \alpha_i}$$

in Uebereinstimmung mit (12).

*) LAGRANGE Mém. de Berlin 1792 p. 248. Vergl. SCHREIBER Leipz. Berichte 1856 p. 65.

14. Eine homogene ganze Function der Variablen x und y von m Dimensionen

$$\sum_r a_r \binom{m}{r} x^{m-r} y^r$$

worin r alle Zahlen von 0 bis m und $\binom{m}{r}$ den r ten Binomialcoefficienten bei dem Exponenten m bedeutet, kann bei ungeradem m im Allgemeinen auf die Form

$$\sum_i p_i x + q_i y^m$$

gebracht werden, so dass i alle Zahlen von 1 bis $\frac{m+1}{2}$ bedeutet.

Dem die $m+1$ Coefficienten $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ sind durch die $m+1$ gegebenen Grössen a_0, a_1, \dots, a_m im Allgemeinen vollständig bestimmt. Bei geradem m bleibt, wenn man $i = 1, 2, \dots, \frac{m+2}{2}$ setzt, von den $m+2$ Coefficienten $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ einer unbestimmt.

Um die Function

$$a_0 x^{2n-1} + a_1 \binom{2n-1}{1} x^{2n-2} y + \dots + a_{2n-1} y^{2n-1}$$

in die Form

$$p_1 x + q_1 y^{2n-1} + p_2 x + q_2 y^{2n-1} + \dots + p_n x + q_n y^{2n-1}$$

zu bringen*), setzt man

$$q_i = p_i a_i, \quad p_i^{2n-1} = b_i$$

und erhält die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_0 &= b_1 && + \dots + b_n \\ a_1 &= b_1 a_1 && + \dots + b_n a_n \\ a_2 &= b_1 a_1^2 && + \dots + b_n a_n^2 \\ &\dots && \dots \dots \dots \\ a_{2n-1} &= b_1 a_1^{2n-1} && + \dots + b_n a_n^{2n-1}. \end{aligned}$$

Dann bildet man die Function

$$z = a_1 \dots z = a_n = C_n + C_{n-1} z + \dots + C_1 z^{n-1} + z^n,$$

* SALVESTER Philos. Mag. 1854, II p. 394 hat diese Transformation gezeigt und den gesuchten Ausdruck die canonische Form der Function genannt. Ueber die canonische Form einer homogenen Function geraden Grades von 2 Variablen hat SALVESTER a. a. O. und Cambr. and Dublin math. J. 9 p. 93 weitere Untersuchungen mitgetheilt. Vergl. CAYLEY Crelle J. 54 p. 48.

welche verschwindet, wenn z einen der Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ annimmt, und gewinnt aus der 1ten, 2ten, \dots Bedingung, indem man jedesmal die n folgenden Bedingungen hinzuzieht, das System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} C_n a_0 & + & C_{n-1} a_1 & + & \dots & + & C_1 a_{n-1} & + & a_n & = & 0 \\ C_n a_1 & + & C_{n-1} a_2 & + & \dots & + & C_1 a_n & + & a_{n+1} & = & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_n a_{n-1} & + & C_{n-1} a_n & + & \dots & + & C_1 a_{2n-2} & + & a_{2n-1} & = & 0. \end{array}$$

Da nun zugleich

$$C_n + C_{n-1} z + \dots + C_1 z^{n-1} + z^n = 0,$$

wenn z einen der Werthe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ hat, so giebt es von 0 verschiedene Grössen C_1, \dots, C_n , welche diesen $n+1$ Gleichungen genügen, unter der Bedingung (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & \dots & a_n & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & \dots & a_{2n-1} & z^n \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung gehört zu den oben (§5) betrachteten. Nachdem man ihre Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ berechnet hat, findet man die Grössen b_1, \dots, b_n aus den ersten n Bedingungen 13, und zwar bestimmt unter der Voraussetzung, dass die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ alle von einander verschieden sind.

15. Wenn die ganze Function $q(t_1, \dots, t_n)$ in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ ten Grad nicht übersteigt, und wenn

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n),$$

so findet man durch wiederholte Anwendung von LAGRANGE'S Interpolationsformel 11

$$\begin{aligned} \frac{q(t_1, \dots)}{f(t_1)} &= \sum_h \frac{q(\alpha_h, \dots)}{f'(\alpha_h)(t_1 - \alpha_h)} \\ \frac{q(\alpha_h, t_2, \dots)}{f(t_2)} &= \sum_i \frac{q(\alpha_h, \alpha_i, \dots)}{f'(\alpha_i)(t_2 - \alpha_i)} \\ \frac{q(t_1, \dots, t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)} &= \sum_{h, i, \dots, p} \frac{q(\alpha_h, \alpha_i, \dots, \alpha_p)}{f'(\alpha_h) \dots f'(\alpha_p)(t_1 - \alpha_h) \dots (t_n - \alpha_p)} \end{aligned}$$

eine Summe von n^n Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für h, i, \dots, p alle Zahlen von 1 bis n setzt.

Wenn insbesondere die Function φ alternirend ist, mithin zu $\mathcal{J}(t_1, \dots, t_n)$ ein constantes Verhältniss hat (2), so verschwindet jedes Glied der Summe, in welchem die Nummern h, i, \dots, p nicht alle von einander verschieden sind, und man hat für h, i, \dots, p nur die Permutationen von $1, 2, \dots, n$ zu setzen. Dabei ist

$$f' a_h f' a_i \dots f' a_p = -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)^2$$

und der Quotient $\mathcal{J}(a_h, a_i, \dots, a_p) : \mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)$ hat den Werth 1 oder -1 , je nachdem die Reihe h, i, \dots, p mit $1, 2, \dots, n$ zu derselben Classe von Permutationen gehört oder nicht. Daher bilden die Glieder der Summe eine Determinante n ten Grades, und man hat *

$$\frac{\mathcal{J}(t_1, \dots, t_n) \mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)}{f t_1 \dots f t_n} = -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \pm \frac{1}{t_1 - a_1} \dots \frac{1}{t_n - a_n}.$$

Anmerkung. Entwickelt man den Quotienten

$$\frac{q(t_1, \dots, t_n)}{f t_1 \dots f t_n}$$

nach fallenden Potenzen von t_1, \dots, t_n , und bezeichnet man den Coefficienten von $t_1 t_2 \dots t_n^{-1}$ durch

$$\left[\frac{q(t_1, \dots, t_n)}{f t_1 \dots f t_n} \right] t_1 \dots t_n^{-1}$$

so erhält man auch in dem Falle, dass die Function φ in Bezug auf die einzelnen Variablen den $(n-1)$ ten Grad übersteigt,

$$\left[\frac{q(t_1, \dots, t_n)}{f t_1 \dots f t_n} \right] t_1 \dots t_n^{-1} = \sum \frac{q(a_h, \dots, a_p)}{f' a_h \dots f' a_p}$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathcal{J}(t_1, \dots, t_n) \mathcal{J}(t_1, \dots, t_n)}{f t_1 \dots f t_n} \right] t_1 \dots t_n^{-1} &= -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum \frac{\mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)^2}{\mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)} \\ &= \left[\frac{\mathcal{J}(t_1, \dots, t_n)^2 f' t_1 \dots f' t_n}{f t_1 \dots f t_n} \right] t_1 \dots t_n^{-1} \\ &= \mathcal{J}(a_1, \dots, a_n)^2 \sum a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} \dots \end{aligned}$$

* CACHY Exerc. d'anal. 2 p. 154. hat diesen Satz gefunden und durch die im folgenden Artikel mitgetheilte Betrachtung bewiesen.

** JACOBI Crelle J. 22 p. 368.

*** BLICH Crelle J. 54 p. 98.

Die Glieder dieser beiden Summen werden aus den Permutationen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gebildet.

16. Dass die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ t_1 - \alpha_1 & & & t_n - \alpha_n \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ t_n - \alpha_n & & & t_n - \alpha_n \end{vmatrix}$$

den angegebenen Werth (15)

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(t_1 - \alpha_1)(t_2 - \alpha_2) \dots (t_n - \alpha_n)}{(t_1 - \alpha_2)(t_1 - \alpha_3) \dots (t_1 - \alpha_n) \dots (t_{n-1} - \alpha_n)}$$

besitzt, wird durch folgende Betrachtung erkannt. Wenn man die Zeilen der Determinante C der Reihe nach mit $f'(t_1), f'(t_2), \dots$ multiplicirt, so erhält man

$$C f'(t_1) \dots f'(t_n) = \Sigma \pm \frac{f'(t_1)}{t_1 - \alpha_1} \dots \frac{f'(t_n)}{t_n - \alpha_n}$$

eine ganze alternirende Function (2) sowohl von t_1, \dots, t_n , als auch von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, und theilbar durch $\mathcal{J}(t_1, \dots, t_n) \mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine von den Grössen $t_1, \dots, t_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ unabhängige Zahl, welche sich dadurch ermitteln lässt, dass man den Grössen t_1, \dots, t_n der Reihe nach die Werthe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zuertheilt. In diesem Falle verschwinden alle die Elemente der Determinante, welche neben der Diagonale stehen; daher bleibt von der Determinante nur ihr Anfangsglied übrig, welches in

$$f'(\alpha_1) f'(\alpha_2) \dots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathcal{J}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

übergeht (7). Also ist

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

der gesuchte Quotient.

17. Der Coefficient γ_{ik} des Elements $\frac{1}{t_i - \alpha_k}$ in der Determinante C (16) entsteht nach §. 3, 4 aus C durch Weglassung von t_i und α_k in den Reihen t_1, \dots, t_n und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und durch Multiplication mit $(-1)^{i+k}$. Daher hat man

$$\gamma_{ik} = (-1)^{i+k} (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{n-2}{2}} \frac{(t_1 \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)(\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}{\frac{f'(t_1)}{t_1 - \alpha_k} \dots \frac{f'(t_{i-1})}{t_{i-1} - \alpha_k} \frac{f'(t_{i+1})}{t_{i+1} - \alpha_k} \dots \frac{f'(t_n)}{t_n - \alpha_k}}$$

Indem man noch die Function

$$g z = z - t_1 z - t_2 \dots z - t_n$$

bildet, findet man ⁸⁾

$$f \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, f \dots, c_{k-1}, c_{k+1}, \dots = -1^{i+k} \frac{f t_1, \dots, f t_n}{g' t_i f' c_k}$$

$$t_1 - c_k \dots t_{i-1} - c_k t_{i+1} - c_k \dots t_n - c_k = -1^{n-1} \frac{g c_k}{c_k - t_i}$$

und mit Hülfe dieser Werthe

$$\gamma_{ik} = -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{f t_1, \dots, f t_n}{f t_1 \dots f t_n} \frac{f t_i g c_k}{g' t_i f' c_k} \frac{1}{c_k - t_i}$$

$$\frac{\gamma_{ik}}{C} = - \frac{f t_i g c_k}{g' t_i f' c_k} \frac{1}{t_i - c_k}.$$

18. Aus dem linearen System

$$\frac{x_1}{t_1 - c_1} + \dots + \frac{x_n}{t_1 - c_n} = u_1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\frac{x_1}{t_n - c_1} + \dots + \frac{x_n}{t_n - c_n} = u_n$$

findet man nach §. 8, 1

$$C x_k = u_1 \gamma_{1k} + \dots + u_n \gamma_{nk}$$

mithin 17

$$x_k = - \frac{g c_k}{f' c_k} \left\{ \frac{f t_1}{g' t_1} \frac{u_1}{t_1 - c_k} + \dots + \frac{f t_n}{g' t_n} \frac{u_n}{t_n - c_k} \right\}.$$

Anmerkung. Der besondere Fall, in welchem alle Zeilen und Columnen des Systems

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{t_1 - c_1} & \dots & \frac{1}{t_1 - c_n} u_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{t_n - c_1} & \dots & \frac{1}{t_n - c_n} u_n \end{array}$$

harmonische Reihen sind, kommt in der Theorie der approximativen Quadraturen vor GAUSS 1844 Comm. Gött. Tom. 3. Vergl. JACOB Crelle J. 4 p. 304. SCHELLBACH Crelle J. 16 p. 192. SCHEIBNER Leipz. Berichte 1856 p. 73. u. A.), und ist von

⁸⁾ HADENKAMP Crelle J. 22 p. 184. 25 p. 182. LIOUVILLE J. 41 p. 466. HERMITE Crelle J. 52 p. 43.

JOACHIMSTHAL Crelle J. 48 p. 411 neu behandelt worden. Vergl. auch LIGOWSKI Grunert Archiv 36 p. 181.

19. Wenn man die Determinante (16 ff.

$$C = \frac{\mathcal{V}_{in}}{t_i - \alpha_1} + \dots + \frac{\mathcal{V}_{in}}{t_i - \alpha_n}$$

nach t_i differentirt, so erhält man eine neue Determinante, welche von C dadurch sich unterscheidet, dass die Elemente der i ten Zeile

$$\frac{-1}{(t_i - \alpha_1)^2}, \dots, \frac{-1}{(t_i - \alpha_n)^2}$$

sind (§. 3, 43). Daher ist *)

$$(-1)^n \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \dots \partial t_n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} & \dots & \frac{1}{(t_1 - \alpha_n)^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(t_n - \alpha_1)^2} & \dots & \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2} \end{vmatrix} = B.$$

20. Wenn man die Determinante B durch die Determinante C dividirt, so erhält man

$$\frac{B}{C} = \sum \frac{1}{t_1 - \alpha_h, t_2 - \alpha_i, \dots, t_n - \alpha_p}$$

eine Summe, deren Glieder gebildet werden, indem man für h, i, \dots, p alle Permutationen der Numern 1, 2, ..., n setzt.

Beweis. Das Product

$$B f t_1^2 \dots f t_n^2 = \sum \pm \left\{ \frac{f t_1}{t_1 - \alpha_1} \dots \frac{f t_n}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

ist eine ganze alternirende Function sowohl von t_1, \dots, t_n , als auch von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, und theilbar durch $\mathcal{A}(t_1, \dots, t_n) \mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Der Quotient ist eine symmetrische Function $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, welche in Bezug auf jede der Variablen den $(n-1)$ ten Grad erreicht und daher (15) durch

$$f t_1 \dots f t_n = \sum \frac{\varphi \alpha_h, \dots, \alpha_p}{f' \alpha_h \dots f' \alpha_p t_1 - \alpha_h \dots t_n - \alpha_p}$$

dargestellt werden kann.

*) BORCHARDT Berl. Monatsbericht 1853 p. 465 und Crelle J. 53 p. 193.

**) BORCHARDT a. a. O. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 53 p. 166.

Wenn nun t_1, t_2, \dots, t_n der Reihe nach die Werthe $\alpha_h, \alpha_i, \dots, \alpha_p$ erhalten, welche nicht alle von einander verschieden sind, so verschwindet

$$\frac{B f t_1^2 \dots f t_n^2}{f t_1 \dots f t_n},$$

weil nicht nur B , sondern auch $\frac{f t_i^2}{t_2 - t_1}$ verschwindet, während z. B. t_1 und t_2 mit α_h zusammenfallen. Also findet man alle nicht verschwindenden Glieder der Summe, indem man für h, i, \dots, p alle Permutationen der Nummern $1, 2, \dots, n$ setzt. Wenn aber t_1, t_2, \dots, t_n der Reihe nach die von einander verschiedenen Werthe $\alpha_h, \alpha_i, \dots, \alpha_p$ erhalten, so bleibt von der Determinante

$$\Sigma \pm \left\{ \frac{f t_1}{t_1 - \alpha_1} \dots \frac{f t_n}{t_n - \alpha_n} \right\}^2$$

nur ein Glied $\varepsilon f' \alpha_h f' \alpha_i \dots f' \alpha_p$ übrig, während

$$f t_h, \alpha_i, \dots, \alpha_p \text{ in } \varepsilon f t_1, \dots, t_n$$

übergeht. Daher ist

$$\begin{aligned} q t_h, \alpha_i, \dots, \alpha_p &= \left\{ \frac{f' t_h \dots f' t_p}{f t_1, \dots, t_n} \right\}^2 = -1^{\frac{n(n-1)}{2}} f' t_h \dots f' t_p, \\ &= -1^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{B f t_1 \dots f t_n}{f t_1, \dots, f t_n} = \Sigma \frac{1}{t_1 - \alpha_h \dots t_n - \alpha_p}. \end{aligned}$$

Anmerkung. Nach (19) hat man die Identität

$$\begin{aligned} \Sigma \frac{1}{t_1 - \alpha_h \dots t_n - \alpha_p} &= \frac{-1^n}{C} \frac{\partial^n C}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \\ &= -1^n \frac{f t_1 \dots f t_n}{f t_1, \dots, t_n} \frac{\partial^n}{\partial t_1 \dots \partial t_n} \left(\frac{f t_1 \dots t_n}{f t_1 \dots f t_n} \right). \end{aligned}$$

Der Differentialquotient (§. 3, 13) ist der Quotient einer alternirenden ganzen Function von t_1, \dots, t_n dividirt durch $f(t_1)^2 \dots f(t_n)^2$. Indem man denselben durch $f t_1 \dots f t_n$ dividirt und den Quotienten mit $f t_1 \dots f t_n$ multiplicirt, erhält man die erzeugende Function aller ganzen symmetrischen Functionen von den Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$. Denn die Entwicklung der Identität nach fallenden Potenzen von t_1, \dots, t_n giebt einerseits die symmetrische Function der Wurzeln

$$\Sigma \alpha_h^{m_1} \alpha_i^{m_2} \dots \alpha_p^{m_n},$$

andererseits den Ausdruck derselben durch die Coefficienten der Gleichung, worüber man in der angeführten Abhandlung weitem Aufschluss findet.

21. Wenn $F_1 z, \dots, F_m z$ ganze Functionen und x_1, \dots, x_m veränderliche Argumente sind, welche für z gesetzt werden, so ist die Determinante $\Sigma \pm F_1(x_1) \dots F_m(x_m)$ eine alternirende ganze Function der Argumente x_1, \dots, x_m ; mithin durch das Product der Differenzen $\Delta x_1 \dots x_m$ theilbar (2). Der Quotient kann unter der Voraussetzung $m < n$ und dass keine der Functionen den $(n-1)$ ten Grad übersteigt, interpolatorisch aus den Werthen berechnet werden, welche die Functionen bei den gegebenen Werthen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ der Argumente annehmen. Bezeichnet man durch

$$D \alpha_1, \dots, \alpha_n; x_1, \dots, x_m$$

das Product der $m n$ Differenzen, welche durch Subtraction aller Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von allen Grössen x_1, \dots, x_m entstehen, so ist

$$\frac{\Sigma \pm F_1 x_1 \dots F_m x_m}{\Delta x_1, \dots, x_m} = \Sigma \frac{\Sigma \pm F_1 \alpha_1 \dots F_m \alpha_m D' \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n; x_1, \dots, x_m}{\Delta \alpha_1, \dots, \alpha_m D \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n}$$

eine Summe von $\binom{n}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ je m verschiedene Grössen der Reihe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ setzt *.

Beweis. Bildet man $q z = z - \alpha_1 \dots z - \alpha_n$, so ist (1)

$$\frac{F_i x_k}{q(x_k)} = \frac{F_i \alpha_1}{q'(\alpha_1)(x_k - \alpha_1)} + \dots + \frac{F_i \alpha_n}{q'(\alpha_n)(x_k - \alpha_n)}$$

und nach der Multiplicationsregel (§. 3, 1)

$$\Sigma \pm \frac{F_1 x_1}{q(x_1)} \dots \frac{F_m x_m}{q(x_m)} = \Sigma \left(\Sigma \pm \frac{F_1 \alpha_1}{q'(\alpha_1)} \dots \frac{F_m \alpha_m}{q'(\alpha_m)} \cdot \Sigma \pm \frac{1}{x_1 - \alpha_1} \dots \frac{1}{x_m - \alpha_m} \right).$$

Nun ist (§. 3, 4)

$$\Sigma \pm \frac{F_1 \alpha_1}{q(\alpha_1)} \dots \frac{F_m \alpha_m}{q(\alpha_m)} = \frac{\Sigma \pm F_1 x_1 \dots F_m x_m}{q(x_1) \dots q(x_m)},$$

ferner (7)

$$q'(\alpha_1) \dots q'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta \alpha_1, \dots, \alpha_m {}^2 D \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m$$

*) BORCHARDT über eine Interpolationsformel. Abhandl. d. Berl. Acad. 1860 p. 4.

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 - y & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 - y & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 - y \end{vmatrix}$$

welcher in der That durch die Werthe $\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)$ genügt wird. Denn wenn man z. B. zur ersten Colonne die mit z, z^2, \dots multiplicirten folgenden Columnen addirt, so verschwinden alle Elemente der ersten Colonne.

2. Das mit dem Zeichen $(-1)^n$ versehene Product der Wurzeln $\varphi(\alpha_1) \dots \varphi(\alpha_n)$ wird gefunden, indem man das von y unabhängige Glied der Gleichung durch den Coefficienten von y^n dividirt. Daher ist

$$\varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

Dasselbe Resultat kann man auf dem im Folgenden (6) bei dem allgemeineren Problem angezeigten Wege ableiten, indem man die Determinante (§. 10, 1)

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \varphi(\alpha_1) \dots \varphi(\alpha_n) = \begin{vmatrix} \varphi(\alpha_1) & \alpha_1 \varphi(\alpha_1) & \alpha_1^2 \varphi(\alpha_1) & . & . \\ \varphi(\alpha_2) & \alpha_2 \varphi(\alpha_2) & \alpha_2^2 \varphi(\alpha_2) & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

in das Product

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . \\ a_{n-1} & a_0 & . & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & . & . \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 3, 1).

3. Die Determinante des Systems, dessen Zeilen durch cyclische Vertauschung aus der jedesmal vorhergehenden Zeile gebildet werden,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & . & . & a_{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & . & . & a_0 \end{vmatrix}$$

*) Dieser alte Satz ist bis jetzt auf einen bestimmten Autor nicht zurückgeführt worden. In der Angabe desselben von SPOTTISWOODE Crelle

J. 51 p. 375 fehlt das Zeichen $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

heisst die Norm* der n -dentigen Function $q(z)$. Von den n^n Gliedern des Products $q(\alpha_1) \dots q(\alpha_n)$ bleiben nur die $1, 2, \dots, n$ Glieder der Determinante übrig. Z. B. für $n = 3$ hat man

$$q(\alpha_1) q(\alpha_2) q(\alpha_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 - 3a_0a_1a_2.$$

In Fällen, welche eine unmittelbare Angabe des Products zulassen, wird umgekehrt die Determinante auf das Product zurückgeführt. Z. B.

I. Wenn a_1, a_2, \dots, a_{n-1} den Werth 1 haben, so ist

$$a_i + a_i^2 + \dots + a_i^{n-1} + 1 = 0,$$

$$q(\alpha_1) = a_0 - 1, \dots, q(\alpha_{n-1}) = a_0 - 1, \quad q(\alpha_n) = a_0 - 1 + n,$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & a_0 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = a_0 - 1 + n(a_0 - 1)^{n-1}.$$

II. Wenn a_0, a_1, a_2, \dots eine geometrische Progression bilden, und zwar $a_0 = 1, a_1 = r$, u. s. w., so ist

$$q(z) = \frac{1 - z^n}{1 - rz}.$$

Nun sind $1 - r\alpha_1, 1 - r\alpha_2, \dots$ die Divisoren von $1 - r^n$, daher

$$\begin{vmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r^{n-1} & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r^2 & r^3 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 - r^{n(n-1)}.$$

III. Wenn a_2, a_3, \dots verschwinden, so sind $a_0 + a_1\alpha_1, a_0 + a_1\alpha_2, \dots$ die Divisoren von $a_0^n - (-a_1)^n$, daher

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & & \\ & a_0 & a_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_0 & a_1 \\ a_1 & & & & & a_0 \end{vmatrix} = a_0^n - (-a_1)^n.$$

* Gauss hat 1831 die »Norm einer complexen Zahl« als das reale Product der complexen Zahl mit der conjugirten complexen Zahl eingeführt. Theoria resid. biquadr. II §. 30.

4. Wenn die ganze Function

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = b_n x - \beta_1 \dots (x - \beta_n)$$

gegeben ist, und x eine Wurzel der Gleichung $g(x) = 0$ bedeutet, so ist die ganze Function

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m = a_m x - \alpha_1 \dots (x - \alpha_m)$$

ndeutig, mithin die Wurzel einer bestimmten Gleichung n ten Grades.

Aus den Werthen

$$f(x), \quad x f(x), \dots, x^{n-1} f(x), \quad g(x), \quad x g(x), \dots, x^{m-1} g(x)$$

bilde man unter der Voraussetzung $g(x) = 0$ das System von $n + m$ Zeilen

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & a_0 - y & + a_1 x & + \dots \\ 0 & = & & a_0 - y x & + \dots \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & = & & & a_0 - y x^{n-1} + \dots \\ 0 & = & b_0 & + b_1 x & + \dots \\ 0 & = & & b_0 x & + \dots \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & = & & & b_0 x^{m-1} + \dots \end{array}$$

Nach Elimination von $x^0, x^1, \dots, x^{n+m-1}$ (§. 8, 3) bleibt die gesuchte Gleichung für y vom n ten Grade übrig

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 - y & a_1 & a_2 & \dots \\ & a_0 - y & a_1 & \dots \\ & & a_0 - y & \dots \\ & & & \dots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots \\ & b_0 & b_1 & \dots \\ & & b_0 & \dots \\ & & & \dots \end{vmatrix}$$

welcher durch die Werthe $f(\beta_1), \dots, f(\beta_n)$ genügt wird.

Anmerkung. Diese Gleichung trifft zusammen mit der nach TSCHIRNHAUS *) zu bildenden Resultante der Gleichung $g(x) = 0$. Dabei wird die Resultante durch Verfügungen über

*) Brief an Leibniz 1677 April 17 und Acta Erud. 1683. Vergl. LAGRANGE Mém. de Berlin 1770. Reflexions .. 40 ff.

die Coefficienten der Hülfsfunction $f(x)$ zu einer besondern: mit jeder Wurzel y der Resolvente ist durch das System

$$g \cdot x = 0, \quad f \cdot x - y = 0$$

eine bestimmte Wurzel x der gegebenen Gleichung verbunden.

5. Das mit dem Zeichen -1^n versehene Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1), \dots, f(\beta_n)$ wird gefunden, indem man das von y unabhängige Glied R der aufgestellten Gleichung durch den Coefficienten von y^n dividirt. Nun ist

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ & a_0 & a_1 & . & . & . \\ & & a_0 & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & & & \\ & b_0 & b_1 & . & . & . & & \\ & & b_0 & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

eine Determinante $(n+m)$ ten Grades, von welcher n Zeilen aus den Coefficienten von $f(x)$ und die folgenden m Zeilen aus den Coefficienten von $g \cdot x$ gebildet sind. Also ist

$$b_n^m f(\beta_1) \cdot \dots \cdot f(\beta_n) = R.$$

Zugleich hat man nach der oben (§. 10, 21) angegebenen Bezeichnung

$$\begin{aligned} b_n^m f(\beta_1) \cdot \dots \cdot f(\beta_n) &= a_m^n b_n^m D \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n \\ &= -1^{mn} a_m^n b_n^m D \beta_1, \dots, \beta_n; \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ &= -1^{mn} a_m^n g \alpha_1 \cdot \dots \cdot g \alpha_m. \end{aligned}$$

Hiernach ist das angegebene Product im Werthe R eine symmetrische ganze Function sowohl der Wurzeln β_1, \dots, β_n , als auch der Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, und zugleich eine homogene ganze Function sowohl der Coefficienten a_0, \dots, a_m von n Dimensionen, als auch der Coefficienten b_0, \dots, b_n von m Dimensionen, und heisst die Resultante der beiden ganzen Functionen $f(x)$ und $g \cdot x$, während die Gleichung $R = 0$ die Resultante des Systems von Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ genannt wird. Vergl. §. 8, 3.

Anmerkung. Die Aufstellung der Resultante von zwei algebraischen Gleichungen (aequatio finalis) ist von EULER Mém.

de Berlin 1748 p. 234) auf die Berechnung von symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichungen zurückgeführt worden. Zu demselben Zweck hat LAGRANGE (Mém. de Berlin 1769 p. 303) den Logarithmus von R berechnet. Die Ableitung der Resultante aus einem linearen System ist gleichzeitig von EULER (Mém. de Berlin 1764 p. 96) und BEZOUT (Mém. de Paris 1764 p. 298) angegeben worden. Von dieser Ableitung ist SYLVESTER's dialytische Methode (Philos. Mag. 1840 no. 104. Vergl. RICHELOT Crelle J. 24 p. 226) und HESSE's Verfahren (Crelle J. 27 p. 4) nicht wesentlich verschieden.

6. Die Identität des Products $b_n^m f(\beta_1) \dots f(\beta_n)$ mit der Determinante R (§) wird ohne Rücksicht auf die Gleichung (4) erkannt), indem man die Determinante

$$P = \begin{vmatrix} f\beta_1 & \beta_1 f\beta_1 & \dots & \beta_1^{n-1} f\beta_1 & g\beta_1 & \dots & \beta_1^{m-1} g\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f\beta_n & \beta_n f\beta_n & \dots & \beta_n^{n-1} f\beta_n & g\beta_n & \dots & \beta_n^{m-1} g\beta_n \\ f\alpha_1 & \alpha_1 f\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n-1} f\alpha_1 & g\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-1} g\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f\alpha_m & \alpha_m f\alpha_m & \dots & \alpha_m^{n-1} f\alpha_m & g\alpha_m & \dots & \alpha_m^{m-1} g\alpha_m \end{vmatrix}$$

in das Product von R mit der Determinante

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \beta_1^{n+m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \beta_n & \dots & \beta_n^{n+m-1} \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{n+m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \dots & \alpha_m^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

zerlegt (§. 3, 1). Zuzufolge der Gleichungen

$$f\alpha_1 = 0, \dots, f\alpha_m = 0, \quad g\beta_1 = 0, \dots, g\beta_n = 0$$

ist aber (§. 4, 6 und §. 10, 1)

$$\begin{aligned} P &= \begin{vmatrix} f\beta_1 & \dots & \beta_1^{n-1} f\beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f\beta_n & \dots & \beta_n^{n-1} f\beta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g\alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-1} g\alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g\alpha_m & \dots & \alpha_m^{m-1} g\alpha_m \end{vmatrix} \\ &= f\beta_1 \dots f\beta_n g\alpha_1 \dots g\alpha_m \mathcal{A}(\beta_1, \dots) \mathcal{A}(\alpha_1, \dots). \end{aligned}$$

*) BORCHARDT Crelle J. 57 p. 483. Vergl. HESSE krit. Zeitschr. f. Math. 1858 p. 483 und TORTOLINI Ann. di Matem. 1859 p. 5.

Ferner ist identisch

$$Q = .f \beta_1, \dots, \alpha_1, \dots = \frac{g \alpha_1 \dots g \alpha_m}{b_n^m} .f \alpha_1, \dots, .f \beta_1, \dots,$$

folglich

$$b_n^m .f \beta_1, \dots, .f \beta_n = R.$$

7. Die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ ist zugleich die Resultante von $f(x)$ und $g(x) + \lambda f(x)^2$, wenn diese Function von demselben Grade ist als $g(x)$. Denn die Determinante R bleibt unverändert, wenn man zu m Zeilen des Systems der Reihe nach andre mit λ multiplicirte Zeilen desselben addirt (§. 3, 6), zur $n+1$ ten die 1te, zur $n+2$ ten die 2te, u. s. f.

Die Resultante von $f(x)$ und $x - t$ $g(x)$ ist das Product der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ mit der Resultante von $f(x)$ und $x - t$. Denn die gesuchte Resultante ist

$$b_n^m .f \beta_1, \dots, .f \beta_n / t = R f t.$$

Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ beide durch dieselbe ganze Function $h(x)$ theilbar sind, so verschwindet ihre Resultante. Z. B. $f(x)$ und $x - \alpha_i$ $g(x)$ haben die Resultante $R f \alpha_i = 0$.

8. Umgekehrt schliesst man: Wenn die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ verschwindet, so sind $f(x)$ und $g(x)$ beide durch eine bestimmte ganze Function $h(x)$ theilbar. Denn 5

$$R = a_m^n b_n^m D \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_n$$

verschwindet nicht, wenn $a_m = 0$ oder $b_n = 0$, weil dabei eine Wurzel von $f(x) = 0$ oder von $g(x) = 0$ unendlich wird; R verschwindet also nur dann, wenn mindestens eine unter den Differenzen $\beta_i - \alpha_k$ verschwindet. Unter dieser Bedingung sind aber $f(x)$ und $g(x)$ durch $x - \beta_i$ theilbar.

Vermöge der Bedingung $R = 0$ hat die obige Gleichung (4) mindestens eine verschwindende Wurzel z. B. $f \beta_i = 0$, so dass $\beta_i = \alpha_k$ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn nun die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehr gemeinschaftliche Wurzeln besitzen, so haben die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten oder höhern Grades, dessen Coefficienten ganze homogene Functionen der gegebenen Coefficienten sind.

vorkommenden Coefficienten $R_{10}, R_{11}, R_{20}, R_{21}, R_{22}, \dots$ sind partiale Determinanten von R , mithin ganze homogene Functionen der Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$.

Wenn nun die Resultante R nicht verschwindet, so haben die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor.

Wenn $R = 0$ und R_{11} nicht zugleich verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades

$$R_{10} + R_{11}x.$$

Wenn $R = 0$, $R_{11} = 0$ und R_{22} nicht zugleich verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor zweiten Grades

$$R_{20} + R_{21}x + R_{22}x^2$$

u. s. w. Unter der Voraussetzung $R_{22} = 0$ verschwindet auch R_{21} , sonst wäre eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ unendlich.

Anmerkung. Wenn die Coefficienten von $f(x)$ und $g(x)$ Functionen von y sind, so beruht die Auflösung des Systems $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ auf der Bildung der Gleichung $R = 0$ und des hiermit bestimmten gemeinschaftlichen Divisors $h(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$. Nachdem man aus der Gleichung $R = 0$ die Werthe von y berechnet hat, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ die Werthe von x , welche zu den einzelnen Werthen von y gehören. Wenn $h(x)$ vom ersten Grade ist, so gehört zu jedem der berechneten Werthe von y ein Werth von x ; wenn $h(x)$ vom zweiten Grade ist, so gehören zu den Werthen von y je zwei Werthe von x , u. s. w.

9. Wenn die ganzen Functionen $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ eine oder mehrere gemeinschaftliche Wurzeln haben, so bestehen unter den partialen Determinanten von R besondere Relationen, weil die oben §. 8 gebildeten Determinanten, welche Functionen einer gemeinschaftlichen Wurzel ω vom 1ten, 2ten, .. Grade sind, verschwinden.

Der gemeinschaftliche Divisor sei vom ersten Grade; die Determinante R werde durch $\Sigma \pm a_{00}a_{11} \dots a_{n+m-1, n+m-1}$ und der Coefficient des Elements a_{ik} in R durch α_{ik} bezeichnet.

$$p_i = a_{0,i} + a_{1,i}x + \dots + a_{n-1,i}x^{n-1}$$

$$q_i = a_{0,i} + a_{1,i}x + \dots + a_{n+m-1,i}x^{n+m-1}$$

findet man §. 3, 3 die Identität

$$p_i f(x) + q_i g(x) = R x^i.$$

Bildet man nun mit Hülfe der gegebenen Coefficienten

$$p = h_0 p_0 + h_1 p_1 + \dots + h_{n+m-1} p_{n+m-1}$$

$$q = h_0 q_0 + h_1 q_1 + \dots + h_{n+m-1} q_{n+m-1}$$

so findet die geforderte Identität statt.

Anmerkung. Bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Divisors von $f(x)$ und $g(x)$ hatte zuerst EULER (Mém. de Berlin 1764 p. 91)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{q}{p}$$

gesetzt, und die Identität $p f(x) + q g(x) = 0$ der Berechnung des gemeinschaftlichen Divisors

$$\frac{f(x)}{q} = -\frac{g(x)}{p}$$

zu Grunde gelegt. Die Identität

$$p_0 f(x) + q_0 g(x) = R$$

ist von GAUSS (Demonstr. nova altera S. Comm. Gött. III. 1815) in dem besondern Falle betrachtet worden, dass $g(x) = f'(x)$ ist.

11. Durch Differentiation der Identität (10)

$$p_i f(x) + q_i g(x) = R x^i$$

ergibt sich im Allgemeinen

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_k} f(x) + p_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial a_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial a_k} x^i,$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial b_k} f(x) + q_i x^k + \frac{\partial q_i}{\partial b_k} g(x) = \frac{\partial R}{\partial b_k} x^i.$$

Wenn nun $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor ersten Grades haben, und ω die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist, so hat man für $x = \omega$)

$$\begin{aligned}
 p_i \omega^k &= \frac{\partial R}{\partial a_k} \omega^i, & q_i \omega^k &= \frac{\partial R}{\partial b_k} \omega^i, \\
 p_i &= \frac{\partial R}{\partial a_i}, & q_i &= \frac{\partial R}{\partial b_i}, \\
 1 : \omega : \dots : \omega^m &= \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} : \dots : \frac{\partial R}{\partial a_m} \\
 1 : \omega : \dots : \omega^n &= \frac{\partial R}{\partial b_0} : \frac{\partial R}{\partial b_1} : \dots : \frac{\partial R}{\partial b_n}
 \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit der oben (9) angegebenen Proportion.

12. Die Determinante $(n+m)$ ten Grades

$$R = \begin{vmatrix}
 a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\
 & & . & . & . & . & . \\
 b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\
 & & . & . & . & . & .
 \end{vmatrix}$$

kannt durch Verbindung ihrer Zeilen in eine Determinante n ten oder m ten Grades zusammengezogen werden, je nachdem n oder m die grössere der beiden Zahlen ist.

Es sei zunächst $m = n$. Um die n te Zeile von R zu transformiren, multiplicire man die n te Zeile mit b_n und die vorangehenden Zeilen mit b_{n-1} , b_{n-2} , \dots ; ebenso die 2 nte Zeile mit a_n und die vorangehenden mit a_{n-1} , a_{n-2} , \dots . Durch Subtraction der 2 nten Zeile von der n ten, der $(2n-1)$ ten Zeile von der $(n-1)$ ten, \dots bilde man nun unter Anwendung der Bezeichnung

$$d_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$$

die Zeilen

$$\begin{array}{cccccccc}
 d_{01} & d_{11} & . & . & d_{n-1,1} & d_{n1} & & \\
 & d_{02} & . & . & d_{n-2,2} & d_{n-1,2} & d_{n2} & \\
 & & . & . & . & . & . & . \\
 & & & & d_{0n} & d_{1n} & d_{2n} & . & . & .
 \end{array}$$

Die Addition dieser Zeilen ergibt für die n te Zeile von $b_n R$ die Elemente

$$d_{01} \quad d_{02} \quad . \quad . \quad d_{0n} \quad 0 \quad 0 \quad . \quad . \quad .$$

weil $d_{ii} = 0$, $d_{ki} = -d_{ik}$, und daher die Summe

$$d_{i1} + d_{i-1,2} + \dots + d_{1i} = 0.$$

Auf dieselbe Weise transformirt man die $(n-1)$ te, $(n-2)$ te, .. Zeile von R . Man multiplicirt die $(n-i)$ te Zeile mit b_n , die vorangehenden Zeilen mit b_{n-1} , b_{n-2} , .. u. s. f. und findet endlich die Elemente der $(n-i)$ ten Zeile von $b_n^{i+1}R$ durch Addition der abgeleiteten Zeilen

$$\begin{array}{cccccccc} d_{0,i+1} & d_{1,i+1} & \cdot & \cdot & d_{n-i-1,i+1} & \cdot & \cdot & d_{n,i+1} \\ & d_{0,i+2} & \cdot & \cdot & d_{n-i-2,i+2} & \cdot & \cdot & d_{n-1,i+2} & d_{n,i+2} \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & d_{0n} & \cdot & \cdot & d_{i+1,n} & d_{i+2,n} & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Bezeichnet man das $(k+1)$ te Element der $(n-i)$ ten Zeile durch c_{ik} , so hat man

$$c_{ik} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot \cdot + d_{i,k+1}.$$

Analog ist

$$c_{ki} = d_{0,i+k+1} + d_{1,i+k} + \cdot \cdot + d_{i,k+1} = c_{ik},$$

weil die Summe $d_{i+1,k} + d_{i,k+1} + \cdot \cdot + d_{k,i+1}$ identisch verschwindet. Insbesondere hat man

$$c_{i,n-1} = d_{in}, \quad c_{in} = 0,$$

weil a_r und b_r als verschwindend zu betrachten sind, wenn $r > n$.

Hiernach ist nun

$$b_n^n R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{00} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} \\ b_0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n \\ & b_0 & \cdot & \cdot & b_{n-1} & b_n \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \cdot \cdot c_{n-1,n-1}$ durch S ,

so ist (§ 4, 6) $b_n^n R$ das Product von $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S$ mit einer Determinante n ten Grades, die von ihrem Anfangsglied b_n^n sich nicht unterscheidet. Also ist *)

$$R = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S.$$

*) Vergl. unten (14).

Beispiele. Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 2ten Grade sind, so wird

$$R = -S = - \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} \\ d_{02} & d_{12} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 3ten Grade sind, so findet man

$$R = -S = - \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{13} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} \end{vmatrix}.$$

Wenn $f(x)$ und $g(x)$ vom 4ten Grade sind, so findet man

$$R = S = \begin{vmatrix} d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{02} & d_{03} + d_{12} & d_{04} + d_{13} & d_{14} \\ d_{03} & d_{04} + d_{13} & d_{14} + d_{23} & d_{24} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten können nach §. 3, 16 weiter entwickelt werden, wobei die Identität

$$d_{ik}d_{lm} + d_{kl}d_{im} + d_{li}d_{km} = 0$$

(§. 3, 11) zur Verfügung steht.

13. Wenn $m < n$, so bilde man durch Hinzufügung von $n - m$ Zeilen,

$$\begin{array}{cccccc} b_0 & b_1 & . & . & b_n & \\ & b_0 & b_1 & . & . & b_n \\ & & . & . & . & . \\ & & & & . & . \end{array}$$

welche auf der Diagonale endigen, die Determinante 2ten Grades $b_n^{n-m}R$, und verwandle dieselbe auf die angegebene Art (12) in eine Determinante n ten Grades, so dass

$$b_n^{n-m}R = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & . & . & c_{n-1,n-1} \\ . & . & . & . \\ c_{00} & . & . & c_{0,n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist aber durch b_n^{n-m} theilbar, als Product der beiden Determinanten n ten Grades

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 a_0 & a_1 & . & . & b_n & b_{n-1} & . & . & b_{m+1} \\
 & a_0 & a_1 & . & & b_n & . & . & b_{m+2} \\
 & & . & . & . & & . & . & . \\
 & & & . & . & & & . & b_n \\
 c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & . & . & . & & & & 1 \\
 . & . & . & . & . & & & & . \\
 c_{0,0} & c_{0,1} & . & . & . & & & & 1
 \end{array}$$

Man findet nämlich durch Multiplication der ersten Colonne in der ersten Determinante mit den Columnen der zweiten Determinante die erste Colonne des Products, u. s. w. In der That ist

$$a_0 b_{m+i+1} + \dots + a_i b_{m+1} = d_{0,m+i+1} + \dots + d_{i,m+1} = c_{mi}$$

weil a_{m+1}, a_{m+2}, \dots als verschwindend zu betrachten sind. Die zweite Determinante hat den Werth b_n^{n-m} , also ist R der ersten Determinante gleich *.

14. Die abgekürzte Form der Resultante R [2] ist von BEZOUT Mem. de Paris 1764 p. 317 durch ein Verfahren erreicht worden, welches in neuerer Zeit JACOB CRELLE J. 13 p. 101. Vergl. CAYLEY Exerc. d'Anal. 1840 p. 393 in Erinnerung gebracht und durch neue wesentliche Bemerkungen ergänzt hat. Aus den gegebenen Functionen $f(x)$ und $g(x)$, welche beide als Functionen n ten Grades vorausgesetzt werden, bildet man mit Hilfe geeigneter Multiplicatoren n bestimmte Functionen $n-1$ ten Grades u_0, u_1, \dots, u_{n-1} , welche mit $f(x)$ und $g(x)$ zugleich verschwinden. Dann ergibt sich die Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ und der gemeinschaftliche Divisor dieser Functionen aus dem System von Gleichungen $u_0 = 0, \dots, u_{n-1} = 0$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_0 + \dots + a_r x^r + (a_{r+1} + a_{r+2}x + \dots + a_n x^{n-r-1})x^{r+1} \\
 g(x) &= b_0 + \dots + b_r x^r + (b_{r+1} + b_{r+2}x + \dots + b_n x^{n-r-1})x^{r+1}
 \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
 &b_{r+1} + b_{r+2}x + \dots f(x) - (a_{r+1} + a_{r+2}x + \dots) g(x) \\
 &= (a_0 + \dots + a_r x^r) b_{r+1} + \dots + b_n x^{n-r-1} \\
 &= b_0 + \dots + b_r x^r - a_{r+1} + \dots + a_n x^{n-r-1},
 \end{aligned}$$

eine Function $n-1$ ten Grades, welche durch

* Vergl. ROSCHMARIN Crelle J. 28 p. 268.

Wenn nun die Summen $i + k$ und $r + s$ einander gleich sind, so sind γ'_{ik} und γ'_{rs} einander gleich, und man kann ihren gemeinschaftlichen Werth durch γ'_{i+k} bezeichnen. Dann gilt die umfassendere Proportion *

$$1 : \omega : \dots : \omega^{2n-2} = \gamma'_0 : \gamma'_1 : \dots : \gamma'_{2n-2}$$

d. h. die Grössen $\gamma'_0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_{2n-2}$ bilden eine geometrische Progression, deren Verhältniss die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ ist.

Wenn die Determinante S verschwindet, so haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor, und die Resultante R verschwindet [8]. Nun ist S wie R [5] eine homogene ganze Function sowohl der Grössen a_0, a_1, \dots , als auch der Grössen b_0, b_1, \dots von n Dimensionen, also ist der Quotient $S : R$ eine von diesen Grössen unabhängige Zahl. Das Anfangsglied von R ist $a_0^n b_n^n$ und kommt in dem Anfangsglied von

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S = \begin{vmatrix} c_{n-1,0} & \cdot & \cdot & c_{n-1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{0,0} & \cdot & \cdot & c_{0,n-1} \end{vmatrix}$$

mit demselben Zeichen vor. Daher ist $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} S : R = 1$, wie oben [12] durch directe Transformation gezeigt wurde.

15. CAYLEY hat die Berechnung der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$ auf die Entwicklung der symmetrischen ganzen Function [§. 10, 2]

$$F(x, y) = \frac{f(x, g(y) - f(y)g(x))}{y - x} = \sum c_{ik} x^i y^k$$

gegründet **. Dabei wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ vom m ten Grade, $g(x)$ vom n ten Grade, und $m \leq n$ ist [4]. Die Glieder der Summe werden dadurch gebildet, dass man für i und k alle Zahlen von 0 bis $n - 1$ setzt. Weil $F(x, y) = F(y, x)$, so ist $c_{ik} = c_{ki}$.

* JACOBI l. c. p. 406.

** Vergl. SYLVESTER's Mittheilung Philos. Trans. 1853 p. 516. HERMITE Crelle J. 52 p. 47 Anm. CAYLEY Crelle J. 53 p. 366. BORCHARDT Crelle J. 53 p. 367 und 57 p. 442.

Setzt man $a_i b_k - a_k b_i = d_{ik}$, so erhält man

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + \dots)(b_0 + b_1y + \dots) = (b_0 + b_1x + \dots)(a_0 + a_1y + \dots) \\ & = d_{01}(y-x) + d_{02}(y^2-x^2) + \dots + d_{0n}(y^n-x^n) \\ & \quad + d_{12}(xy^2-x^2y) + \dots + d_{1n}(xy^n-x^ny) \\ & \quad + \dots + d_{n-1,n}(x^{n-1}y^n-x^ny^{n-1}) \end{aligned}$$

und daher

[illegible]

Indem man die Glieder absondert, welche $x^i y^k$ enthalten, findet man wie oben (12 und 14

$$c_{jk} = d_{0,j+k+1} + d_{1,j+k} + d_{2,j+k-1} + \dots$$

Abgesehen von dieser Entwicklung hat man

$$F(\beta_i, \beta_k) = 0, \quad F(\beta_i, \beta_i) = f(\beta_i)g'(\beta_i),$$

folglich

$$\Sigma \pm F_{\beta_1, \beta_1} \dots F_{\beta_n, \beta_n} = f_{\beta_1} \dots f_{\beta_n} g'_{\beta_1} \dots g'_{\beta_n}.$$

Wenn man beide Seiten durch $\prod \beta_1, \dots, \beta_n$ dividiert, so findet man (S. 10, 3 und 7)

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \pm c_{00} \cdots c_{n-1,n-1} &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n^n f(\beta_1) \cdots f(\beta_n) \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_n^{n-m} R(\beta). \end{aligned}$$

Die Theilbarkeit der Determinante durch b_n^{n-m} ist oben (13) nachgewiesen worden.

16. ROSENHAIN hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $m + n$ gegebenen Werthen des Arguments x gehören^{*)}. Diese Werthe von $f(x)$ sind eben so wenig von einander unabhängig, als die Werthe von $g(x)$, weil $f(x)$ durch $m + 1$ und $g(x)$ durch $n + 1$ Werthe bestimmt ist (§. 10, 11).

*) Crelle J. 30 p. 157.

Sind x_1, x_2, \dots gegebene Werthe von x , so multiplicire man die Determinante $n + m$ ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & . & . & . \\ & a_0 & a_1 & a_2 & . & . \\ & & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \\ & b_0 & b_1 & b_2 & . & . \\ & & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

zeilenweise mit

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & . & . & x_1^{n+m-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{n+m} & . & . & x_{n+m}^{n+m-1} \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man das Product durch $\Sigma \pm c_{11} \dots c_{n+m, n+m}$, so hat man

$$\begin{aligned} c_{11} &= f(x_1), & c_{12} &= x_1 f(x_1), & \dots, & c_{1n} &= x_1^{n-1} f(x_1), \\ c_{1, n+1} &= g(x_1), & c_{1, n+2} &= x_1 g(x_1), & \dots, & c_{1, n+m} &= x_1^{m-1} g(x_1), \end{aligned}$$

u. s. w., folglich RP

$$= \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1 f(x_1) & . & . & x_1^{n-1} f(x_1) & g(x_1) & x_1 g(x_1) & . & . & x_1^{m-1} g(x_1) \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ f(x_{n+m}) & x_{n+m} f(x_{n+m}) & . & . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Indem man diese Determinante in eine Summe von Producten partialer Determinanten n ten und m ten Grades zerlegt (§. 4, 4), findet man

$$\Sigma [f(x_1) \dots f(x_n) \cdot I(x_1, \dots, x_n) g(x_{n+1}) \dots g(x_{n+m}) \cdot I(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})],$$

eine Summe von $\binom{n+m}{m}$ Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für 1, 2, ..., n alle Combinationen von n verschiedenen Numern der Reihe 1, 2, ..., $n+m$ setzt, und die übrigen Numern so ordnet, dass die Reihe aller Numern jedesmal mit der Reihe 1, 2, ..., $n+m$ zu derselben Classe der Permutationen gehört. Nun ist identisch (§. 10, 21)

$$\frac{I(x_1, \dots, x_{n+m})}{I(x_1, \dots, x_n) \cdot I(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} = D(x_1, \dots, x_n | x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$$

folglich, unabhängig von den Permutationen,

$$R = \Sigma \frac{f(x_1) \dots f(x_n) g(x_{n+1}) \dots g(x_{n+m})}{D(x_1, \dots, x_n | x_{n+1}, \dots, x_{n+m})}.$$

Anmerkung. Mit Hülfe dieser Formel hat ROSEHAIN a. a. O. CAUCHY's interpolatorische Darstellung einer gebrochenen algebraischen Function *) abgeleitet.

Die Resultante von $f(x)$ und $x - z \cdot g(x)$ ist $\bar{r} Rf(z)$, und wird nach der angegebenen Regel durch die Werthe der beiden Functionen ausgedrückt, welche zu $m + n + 1$ Werthen von x gehören, wie folgt:

$$\Sigma \frac{f(x_0) \cdot \cdot \cdot f(x_n) g(x_{n+1}) \cdot \cdot \cdot g(x_{n+m}) (x_{n+1} - z) \cdot \cdot \cdot (x_{n+m} - z)}{D(x_0, \cdot \cdot \cdot, x_n; x_{n+1}, \cdot \cdot \cdot, x_{n+m})}.$$

Die Resultante von $(x - z)f(x)$ und $g(x)$ ist $Rg(z)$ und nach derselben Regel

$$\Sigma \frac{f(x_0) \cdot \cdot \cdot f(x_{n-1}) g(x_n) \cdot \cdot \cdot g(x_{n+m}) (x_0 - z) \cdot \cdot \cdot (x_{n-1} - z)}{D(x_0, \cdot \cdot \cdot, x_{n-1}; x_n, \cdot \cdot \cdot, x_{n+m})}.$$

Durch Division erhält man, nachdem man den Zähler und den Nenner durch $g(x_0) \cdot \cdot \cdot g(x_{n+m})$ dividirt und den Quotienten $f(x_i) : g(x_i)$ durch u_i bezeichnet hat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\Sigma \frac{u_0 \cdot \cdot \cdot u_n}{D(x_0, \cdot \cdot \cdot, x_n; x_{n+1}, \cdot \cdot \cdot, x_{n+m})} (x_{n+1} - z) \cdot \cdot \cdot (x_{n+m} - z)}{\Sigma \frac{u_0 \cdot \cdot \cdot u_{n-1}}{D(x_0, \cdot \cdot \cdot, x_{n-1}; x_n, \cdot \cdot \cdot, x_{n+m})} (x_0 - z) \cdot \cdot \cdot (x_{n-1} - z)}.$$

17. BORCHARDT hat die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$, beide n ten Grades, interpolatorisch durch die Werthe von $f(x)$ und $g(x)$ ausgedrückt, welche zu $n + 1$ gegebenen Werthen x_0, x_1, \dots, x_n des Arguments x gehören **).

Unter der Voraussetzung (13)

$$F(x, y) = \frac{f(x) g(y) - f(y) g(x)}{y - x} = \Sigma c_{ik} x^i y^k$$

ist die Determinante $\Sigma \pm c_{00} \cdot \cdot \cdot c_{n-1, n-1}$ der Resultante R gleich oder entgegengesetzt gleich. Nach §. 10. 3 hat man aber

$$\Sigma \pm c_{00} \cdot \cdot \cdot c_{n-1, n-1} = \frac{\Sigma \pm F(x_1, x_1) \cdot \cdot \cdot F(x_n, x_n)}{f(x_1) \cdot \cdot \cdot f(x_n) z}.$$

Bildet man nun die Function $n + 1$ ten Grades

$$q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdot \cdot (x - x_n)$$

*) CAUCHY Anal. algebr. Note 5. Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 127.

**) Berl. Monatsbericht 1859 p. 376 und Crelle J. 57 p. 111.

so ist §. 10, 8

$$J x_1, \dots, x_n = \frac{J x_0, x_1, \dots, x_n}{q' x_0} = \frac{q' x_1 \dots q' x_n}{J x_0, \dots, x_n}.$$

Nach Einführung der Elemente

$$h_{ik} = \frac{F x_i, x_k}{q' x_i q' x_k} = h_{ki}$$

erhält man daher

$$\Sigma \pm c_{00} \dots c_{n-1, n-1} = J x_0, \dots, x_n \Sigma \pm h_{11} \dots h_{nn}.$$

Eine besondere Eigenschaft der Elemente dieser letztern Determinante ergibt sich daraus, dass $F x, y$ in Bezug auf x vom $n-1$ ten Grade, dagegen $q' x$ vom $n+1$ ten Grade ist, dass also §. 10, 9

$$\frac{F x_0, y}{q' x_0} + \frac{F x_1, y}{q' x_1} + \dots + \frac{F x_n, y}{q' x_n} = 0.$$

Demnach ist

$$h_{0k} + h_{1k} + \dots + h_{nk} = 0,$$

also insbesondere

$$\begin{aligned} -h_{00} &= h_{01} + h_{02} + \dots + h_{0n} \\ -h_{11} &= h_{01} + h_{12} + \dots + h_{1n} \\ -h_{22} &= h_{02} + h_{12} + \dots + h_{2n} \end{aligned}$$

u. s. w. Nun haben in der verschwindenden Determinante $n+1$ ten Grades $-1^{n+1} \Sigma \pm h_{00} h_{11} \dots h_{nn}$ alle Elemente gleiche Coefficienten §. 3, 9, deren gemeinschaftlicher Werth durch die Formel

$$[0, 1, \dots, n]$$

bezeichnet wird. Also ist

$$\Sigma \pm c_{00} \dots c_{n-1, n-1} = -1^n J x_0, \dots, x_n [0, 1, \dots, n].$$

18. Die Formel $[0, 1, \dots, n]$ d. h. die Determinante n ten Grades

$$\begin{vmatrix} h_{01} + \dots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & \dots \\ -h_{21} & h_{02} + \dots + h_{2n} & -h_{23} & \dots \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{03} + \dots + h_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

ist von BORCHARDT a. a. O. nach den Producten der in der Diagonale stehenden Grössen $h_{01}, h_{02}, \dots, h_{0n}$ entwickelt worden (vergl. §. 4, 2).

Der Theil derselben, welcher keine dieser Grössen enthält,

$$\begin{vmatrix} h_{12} + \dots + h_{1n} & -h_{12} & -h_{13} & \dots \\ -h_{21} & h_{12} + \dots + h_{2n} & -h_{23} & \dots \\ -h_{31} & -h_{32} & h_{13} + \dots + h_{3n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

ist wiederum eine verschwindende Determinante (§. 3, 9, in welcher alle Elemente denselben Coefficienten haben, der durch $[1, 2, \dots, n]$ bezeichnet wird. Daher ist der Theil der gesuchten Entwicklung, welcher je eine der Grössen h_{01}, h_{02}, \dots enthält,

$$h_{01} [1, 2, \dots, n] + h_{02} [1, 2, \dots, n] + \dots$$

Der Theil von $[0, 1, \dots, n]$, welcher das Product $h_{01}h_{02}$ enthält, ist eine partielle Determinante $(n-2)$ ten Grades, die aus der Determinante $[2, 3, \dots, n]$ dadurch gebildet werden kann, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen $h_{23}, h_{24}, \dots, h_{2n}$ durch die Summen

$$h_{13} + h_{23}, \quad h_{14} + h_{24}, \quad \dots, \quad h_{1n} + h_{2n}$$

ersetzt. Bezeichnet man die so transformirte Determinante durch

$$[\overline{1+2}, 3, \dots, n],$$

so ist der Theil von $[0, 1, \dots, n]$, welcher je 2 von den Grössen h_{01}, h_{02}, \dots enthält,

$$h_{01}h_{02} [\overline{1+2}, 3, 4, \dots, n] + h_{01}h_{03} [\overline{1+3}, 2, 4, \dots, n] + \dots$$

Auf analoge Weise wird der Theil von $[0, 1, \dots, n]$, welcher je 3 von jenen Grössen enthält, durch

$$h_{01}h_{02}h_{03} [\overline{1+2+3}, 4, 5, \dots] + h_{01}h_{02}h_{04} [\overline{1+2+4}, 3, 5, \dots] + \dots$$

ausgedrückt, indem man $[\overline{1+2+3}, 4, 5, \dots]$ aus $[3, 4, 5, \dots]$ dadurch ableitet, dass man die in der Diagonale stehenden Grössen h_{34}, h_{35}, \dots durch die Summen

$$h_{14} + h_{24} + h_{34}, \quad h_{15} + h_{25} + h_{35}, \quad \dots$$

ersetzt. U. s. w. So entsteht die Recursionsregel

$$\begin{aligned} [0, 1, \dots, n] &= \Sigma h_{01} [1, 2, \dots] + \Sigma h_{01}h_{02} [\overline{1+2}, 3, \dots] \\ &\quad + \Sigma h_{01}h_{02}h_{03} [\overline{1+2+3}, 4, \dots] + \dots \\ &\quad + h_{01}h_{02} \dots h_{0n}. \end{aligned}$$

Zufolge derselben ist

$$\begin{aligned}
 [0, 1] &= h_{01} \\
 [0, 1, 2] &= \sum h_{01} [1, 2] + h_{01} h_{02} \\
 &= h_{01} h_{12} + h_{02} h_{12} + h_{01} h_{02} \\
 [0, 1, 2, 3] &= \sum h_{01} [1, 2, 3] + \sum h_{01} h_{02} [1+2, 3] + h_{01} h_{02} h_{03} \\
 &= h_{01} + h_{02} + h_{03} [1, 2, 3] + h_{01} h_{02} [1+2, 3] \\
 &+ h_{01} h_{03} [1+3, 2] + h_{02} h_{03} [2+3, 1] + h_{01} h_{02} h_{03}.
 \end{aligned}$$

Die Formel $[1, 2, 3]$ hat 3 Glieder, die Formel $[1+2, 3]$ hat deren 2, also hat $[0, 1, 2, 3]$ deren 4^2 . Ebenso erkennt man, dass die Formel

$$[1+2+\dots+k, k+1, k+2, k+3]$$

$3^2k + 3 \cdot 2k + k^3 = k(k+3)^2$ Glieder hat. Unter der Annahme, dass für die Werthe von m , welche eine bestimmte Grenze nicht übersteigen, die Formel

$$[1+2+\dots+k, k+1, \dots, k+m]$$

$k(k+m)^{m-1}$ Glieder besitzt, findet man vermöge der Recursionsregel für

$$[1+2+\dots+k, k+1, \dots, k+m+1]$$

die Anzahl der Glieder

$$\begin{aligned}
 k(m+1) \cdot (1+m)^{m-1} + k^2 \binom{m+1}{2} \cdot 2(2+m-1)^{m-2} + k^3 \binom{m+1}{3} \cdot 3(3+m-2)^{m-3} + \dots \\
 = k(m+1)^m + k^2 m(m+1)^{m-1} + k^3 \binom{m}{2} m(m+1)^{m-2} + \dots \\
 = k(k+m+1)^m.
 \end{aligned}$$

Demnach ist die bis zu $m=3$ gültige Annahme unbeschränkt richtig.

19. Die Resultante der Function n ten Grades $f(x)$ und der derivirten Function $f'(x)$ ist [5]

$$a_n^{n-1} f' a_1 \dots f' a_n = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & \cdot \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

wenn das System n Zeilen der ersten Art und $n - 1$ Zeilen der zweiten Art hat. Subtrahirt man die mit n multiplicirte letzte Zeile von der n ten, so erhält die n te Zeile folgende Elemente

$$0, \dots, 0, -na_0, -(n-1)a_1, \dots, -a_{n-1}, 0$$

und die Resultante reducirt sich (§. 2, 5) auf das Product von a_n mit einer Determinante $(2n - 2)$ ten Grades, welche durch A bezeichnet wird. Nach §. 10, 7 ist

$$A = a_n^{n-2} f'(\alpha_1) \dots f'(\alpha_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^2,$$

eine symmetrische ganze Function der Wurzeln $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ (vergl. §. 10, 6) und eine homogene ganze Function der Coefficienten a_0, \dots, a_n von $2n - 2$ Dimensionen, welche die Discriminante der ganzen Function $f(x)$ genannt wird*). Wenn a_n verschwindet, so wird eine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ unendlich gross; dabei verschwindet die Discriminante im Allgemeinen nicht, sondern wird zur Discriminante einer Function $(n - 1)$ ten Grades.

Die Discriminante des Products $f(x)g(x)$ erscheint hiernach (abgesehn vom Zeichen) als das Product der Discriminanten von $f(x)$ und $g(x)$ multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante von $f(x)$ und $g(x)$. Wenn A die Discriminante von $f(x)$ ist, so findet man z. B. für $(x - t)f(x)$ die Discriminante $Af(t)^2$.

20. Wenn die Discriminante von $f(x)$ nicht verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Divisor (8) und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind sämmtlich von einander verschieden.

Wenn die Discriminante von $f(x)$ verschwindet, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Divisor und die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind nicht alle von einander verschieden. Der gemeinschaftliche Divisor theilt auch die Function $pf(x) + qxf'(x)$, welche aus der gegebenen Function dadurch

*) GAUSS Demonstr. nova altera 6 (Commi. Gott. Vol. 3) hatte dieser Formel den Namen »Determinante der Function $f(x)$ oder der Gleichung $f(x) = 0$ « beigelegt. Vergl. JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 371. JACOBI Crelle J. 40 p. 244. Bei dem jetzigen Sprachgebrauch ist der von SYLVESTER (Philos. Mag. 1851, II p. 406) gebildete Name »Discriminante« bezeichnender.

abgeleitet werden kann, dass man ihre Coefficienten a_0, a_1, \dots der Reihe nach mit den Gliedern einer beliebigen arithmetischen Progression multiplicirt, und welche vor Erfindung der Differentialrechnung von HUBER 1657* zur Bestimmung mehrfacher Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gebildet worden ist.

Wenn $f(x)$ und $f'(x)$ den gemeinschaftlichen Divisor t^k haben, und die Discriminante von t nicht verschwindet, so ist $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar. Es sei z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= t^k u, \\ f'(x) &= k t^{k-1} t' u + t^k u' = t^k v. \end{aligned}$$

Wenn nun t' und t einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, so ist u durch t , also $f(x)$ durch t^{k+1} theilbar.

21. Die Function $f(x)$ kann als ein besonderer Werth der homogenen Function von 2 Variablen und n Dimensionen

$$u = A_0 y^n + \binom{n}{1} A_1 y^{n-1} x + \binom{n}{2} A_2 y^{n-2} x^2 + \dots + A_n x^n$$

angesehen werden**. Die Binomialcoefficienten sind den Coefficienten der homogenen Function als Factoren beigegeben, damit die durch n getheilten Differentialquotienten von u Coefficienten derselben Art erhalten, und damit u eine n te Potenz in dem Falle wird, dass A_0, A_1, \dots, A_n eine geometrische Progression bilden.

Nach der Fundamentealeigenschaft der homogenen Functionen hat man die Identität

$$n u = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der gemeinschaftliche Divisor von u und $\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch ein Divisor von $\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial y}$. Die unter der Voraussetzung $y = 1$ gebildete Resultante von $\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial y}$ ist wie die Discriminante

* HUBER Epist. I. Recl. 10 in SCHOOTEN'S Ausgabe von DESCARTES' Geometrie.

** Dieses wichtige Hilfsmittel der Analysis ist von NEWTON Arithm. univ. Inventio divisorum p. 43, PLÜCKER System d. anal. Geom. §. 4, 7, HESSE Crelle J. 28 p. 402, JOACHIMSTHAL Crelle J. 33 p. 373, JACOBI Crelle J. 40 p. 247 und ANDERU, zu dem gegenwärtigen Zweck von SALMONS higher plane curves p. 296 angewendet worden.

von $f(x)$ eine homogene ganze Function der Coefficienten a_0, a_1, \dots, a_n von $2n - 2$ Dimensionen und verschwindet zugleich mit der Discriminante von $f(x)$. Daher hat jene Resultante zu dieser Discriminante ein von den Coefficienten a_0, a_1, \dots unabhängiges Verhältniss.

In der That, wenn man in der Determinante A (19) jede der letzten $n - 2$ Zeilen mit n multiplicirt, und von ihnen der Reihe nach die 2te, 3te, .. Zeile des Systems subtrahirt, so findet man nach Umstellung der n ten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & . & . \\ & & . & . & . & . \\ na_0 & (n-1)a_1 & n-2, a_2 & . & . & . \\ & na_0 & n-1, a_1 & n-2, a_2 & . & . \\ & & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

d. i. die Resultante von $f'(x)$ und $nf(x) - xf'(x)$.

Beispiele. Die Discriminante der Function 2ten Grades

$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

ist die Resultante von $a_1 + a_2x$ und $a_0 + a_1x$, nämlich

$$a_1^2 - a_0a_2.$$

Die Discriminante von $a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + a_3x^3$ ist die Resultante von

$$a_1 + 2a_2x + a_3x^2$$

$$a_0 + 2a_1x + a_2x^2$$

nämlich in der verkürzten Gestalt (12)

$$= \begin{vmatrix} 2a_1^2 - a_0a_2 & a_1a_2 - a_0a_3 \\ a_1a_2 - a_0a_3 & 2a_2^2 - a_1a_3 \end{vmatrix}.$$

Ebenso findet man die Discriminante von

$$a_0 + 4a_1x + 6a_2x^2 + 4a_3x^3 + a_4x^4,$$

$$= \begin{vmatrix} 3a_1^2 - a_0a_2 & 3a_1a_2 - a_0a_3 & a_1a_3 - a_0a_4 \\ 3a_1a_2 - a_0a_3 & 9a_2^2 - 8a_1a_3 - a_0a_4 & 3a_2a_3 - a_1a_4 \\ a_1a_3 - a_0a_4 & 3a_2a_3 - a_1a_4 & 3a_3^2 - a_2a_4 \end{vmatrix}.$$

22. Das in der Discriminante von $f(x)$ enthaltene Product aller positiven und negativen Differenzen zwischen den Wurzeln

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Gleichung $f(x) = 0$ ist der Quotient des bekannten Gliedes durch den Coefficienten des höchsten Gliedes in der geordneten Gleichung, deren Wurzeln die genannten Differenzen sind *).

Um diese Gleichung zu bilden, bemerke man, dass dem System

$$f(x) = 0, \quad f(x+y) = 0$$

genügt wird, indem man für x und $x+y$ alle Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, mithin für y alle Differenzen der Wurzeln, unter denen n verschwinden, und für x den jedesmaligen Subtrahenden setzt. Dabei verschwindet die Resultante R der beiden durch $f(x)$ und $f(x+y)$ bezeichneten Functionen von x [8]. Also ist R durch y^n theilbar, und $R : y^n = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen zwischen jeder der Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und den übrigen Grössen dieser Reihe sind. Diese Differenzen sind aber paarweise entgegengesetzt gleich, also kommen in $R : y^n$ nur gerade Potenzen von y vor.

Unmittelbar findet man die von den verschwindenden Wurzeln befreite Gleichung, indem man **) von dem System

$$I) \quad f(u+v) = 0, \quad f(u-v) = 0$$

ausgeht, welchem durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \quad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

genügt wird. Dieselben Auflösungen hat das System

$$II) \quad \frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} = 0, \quad \frac{f(u+v) - f(u-v)}{2} = 0,$$

dessen erste Gleichung nur gerade, und dessen zweite Gleichung nur ungerade Potenzen von v enthält. Weil $f(u+v) - f(u-v)$ durch v theilbar ist, so umfasst das System II) die beiden Systeme

* Diese unter dem Namen »équation aux carrés des differences« bekannte Gleichung ist von Waring Misc. analyt. 1762 p. 17 mit Hülfe von symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ construiert und zur Untersuchung der Wurzeln einer gegebenen Gleichung gebraucht worden. Besondere Ausdehnungen für die Gleichungen 4ten und 5ten Grades hat Waring in den Philos. Transact. 1763 p. 294 mitgetheilt. Die Ableitung der erwähnten Gleichung durch Elimination wurde von EULER Calc. diff. II, §. 244 gezeigt, und ausführlich von LAGRANGE Mem. de Berlin 1767 p. 344 art. 8. Resolution des equat. art. 8 und Note 3, behandelt.

**) Nach BORCHARDT's Angabe.

$$(III) \quad \frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} = 0, \quad v = 0$$

und

$$(IV) \quad \frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} = 0, \quad \frac{f(u+v) - f(u-v)}{2v} = 0.$$

Dem System (IV) wird durch die Werthe

$$2u = \alpha_i + \alpha_k, \quad 2v = \alpha_i - \alpha_k$$

unter der Beschränkung genügt, dass i und k verschiedene Zahlen der Reihe 1, 2, . . . , n bedeuten. Bildet man nun die Resultanten $\psi(v^2)$ und $\chi(u)$ der Functionen

$$\frac{f(u+v) + f(u-v)}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f(u+v) - f(u-v)}{2v},$$

jene in Bezug auf die Variable u , diese in Bezug auf v^2 , so ist

$$\psi(v^2) = 0, \quad \text{wenn} \quad v^2 = \frac{1}{4}(\alpha_i - \alpha_k)^2,$$

$$\chi(u) = 0, \quad \text{wenn} \quad u = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_k).$$

§. 12. Die Functionaldeterminanten.

1. Wenn n Functionen f_1, f_2, \dots, f_n der n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n gegeben sind und f_{ik} den partialen Differentialquotienten von f_i in Bezug auf die Variable x_k bedeutet, so dass

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

so heisst die Determinante n ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der Functionen oder die Functionaldeterminante des Systems^{*)}. Dieselbe reducirt sich auf eine Determinante niederen Grades, wenn z. B. f_1 nur von x_1 , f_2 nur von x_1 und x_2 abhängig ist (§. 2, 5).

*) JACOBI de determ. functionalibus (Crelle J. 22 p. 349) §. 5.

Daher ist nach §. 5, 1

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial f_1}\right) & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_1}\right) \left(\frac{\partial f_3}{\partial f_2}\right) & 1 & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & 0 & \\ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) & & \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Determinanten reduciren sich auf ihre Anfangsglieder (§. 2, 7): die eine hat den Werth 1, die andere ist dem oben angegebenen Producte gleich.

3. Lehrsatz. Wenn die Determinante R des Systems der Functionen f_1, f_2, \dots, f_n identisch verschwindet, so sind die gegebenen Functionen von einander nicht unabhängig, und umgekehrt *).

Beweis. Wenn die Determinante R identisch verschwindet, so muss von dem Product (2)

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) \cdots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

ein Factor identisch verschwinden. Nun sind im Allgemeinen

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right), \dots, \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

von Null verschieden, weil nach der Voraussetzung (2) in f_1 die Variable x_1 , in f_2 die Variable x_2, \dots nicht fehlt. Also muss

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$$

identisch verschwinden, d. h. die letzte Function ist ohne x_n durch f_1, f_2, \dots, f_{n-1} ausdrückbar. Wenn es sich ereignet, dass in keiner der beiden letzten transformirten Functionen die Variablen x_{n-1}, x_n vorkommen, so hat man identisch

$$\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) = 0$$

d. h. jede der beiden letzten Functionen ist ohne x_{n-1}, x_n durch f_1, f_2, \dots, f_{n-2} ausdrückbar. U. s. w.

* JACOBI det. funct. §. 6 und 7.

Umgekehrt, wenn die gegebenen Functionen nicht unabhängig von einander sind, sondern z. B. f_n durch f_1, f_2, \dots, f_{n-1} ohne x_n ausdrückbar ist, so verschwindet $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$ identisch, folglich auch R .

4. Besondere Fälle. Wenn die Functionen f_1, \dots, f_n linear sind, so ist die Functional-determinante von der Determinante der Coefficienten nicht verschieden (§. 8). Bei dem Verschwinden dieser Determinante sind die Functionen durch eine Gleichung von der Form

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$$

unter einander verbunden.

Wenn die Functionen f_1, \dots, f_n die partialen Differentialquotienten einer gegebenen Function F sind, so ist die Functional-determinante gleichbedeutend mit der von HESSE [Crelle J. 28 p. 83] aus den zweiten partialen Differentialquotienten von F gebildeten Determinante, welcher SYLVESTER [Camb. and Dublin math. J. 6 p. 186] den Namen »Hessian of F « gegeben hat. Diese Functional-determinante verschwindet, sobald f_1, \dots, f_n durch eine Gleichung verbunden sind, welche dadurch zu einer Identität wird, dass man die Differentialquotienten durch die Variablen ausdrückt (3). Sind die Differentialquotienten durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

verbunden, in welcher c_1, \dots, c_n Constanten bedeuten, so geht die Function F durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_1 y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} &= y_{n-1} + c_{n-1} y_n \\ x_n &= c_n y_n \end{aligned}$$

in eine Function der $n-1$ Variablen y_1, \dots, y_{n-1} über, weil

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = f_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_n} + \dots + f_n \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0^*).$$

Die Functional-determinante der Differentialquotienten f_1, f_2, \dots, f_n einer homogenen Function F von 2 Dimensionen (einer

*) Vergl. HESSE Crelle J. 42 p. 447. 56 p. 263.

quadratischen Form) ist zugleich die Discriminante der Function *). Wenn dieselbe verschwindet, so sind die linearen Functionen f_1, \dots, f_n durch eine Gleichung von der Art

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

verbunden, und die Function F ist in Wahrheit eine homogene Function von 2 Dimensionen, aber von weniger als n Variablen **).

Beispiel.

$$\begin{aligned} F &= x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 2yz + xz - 5xy \\ f_x &= 2x - 5y + z \\ f_y &= -5x + 8y + 2z \\ f_z &= x + 2y - 4z \end{aligned}$$

Die Discriminante von F verschwindet, und man hat

$$2f_x + f_y + f_z = 0.$$

Die Substitution

$$x = u + 2w, \quad y = v + w, \quad z = w$$

gibt

$$\begin{aligned} F &= u^2 - 5uv + 4v^2 = (u - v)(u - 4v) \\ &= (x - y - z)(x - 4y + 2z). \end{aligned}$$

5. Wenn U eine gegebene Function der Grössen f_1, f_2, \dots, f_n , jede derselben eine gegebene Function der Grössen x_1, x_2, \dots, x_n ist, wenn ferner R die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet, so ist das bestimmte vielfache Integral

$$\int U df_1 df_2 \dots df_n = \int U R dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

*) Vergl. §. 11, 19 ff. Mit dem Namen »Determinante einer quadratischen Form« hatte GAUSS (Disq. arithm. 454 und 267) den entgegengesetzten Werth der Determinante bezeichnet, welche jetzt gewöhnlich Discriminante heisst. Nach SYLVESTER (Philos. Mag. 1854, II p. 406) ist die Discriminante einer homogenen Function von beliebig vielen Dimensionen eine Resultante, nämlich diejenige Function der Coefficienten, welche verschwinden muss, damit die partialen Differentialquotienten der Function zugleich verschwinden können.

**) GAUSS Disq. arithm. 213 und 267.

unter der Voraussetzung, dass die Grenzen der neuen Integrationen nach den gegebenen Grenzen der ursprünglichen Integrationen gezogen werden *).

Beweis. Stellt man zunächst wie oben (2)

$$\begin{array}{ll} f_1 & \text{als Function von } x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ f_2 & \dots \dots \dots f_1, x_2, x_3, \dots, x_n \\ f_3 & \dots \dots \dots f_1, f_2, x_3, \dots, x_n \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n & \dots \dots \dots f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, x_n \end{array}$$

vor und unterscheidet man die partialen Differentialquotienten der transformirten Functionen durch beigefügte Klammern, so kann man die neuen Variablen nach und nach in das gegebene Integral einführen wie folgt.

Indem man mit der Integration in Bezug auf f_n beginnt, hat man das Differential df_n durch $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_n$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_n die Variable x_n einzuführen. Demnach ist

$$\int U df_1 \dots df_n = \int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \dots df_{n-1} dx_n.$$

Wenn man die Entwicklung dieses transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf f_{n-1} beginnt, so hat man df_{n-1} durch $\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) dx_{n-1}$ zu ersetzen, um statt der Variablen f_{n-1} die Variable x_{n-1} einzuführen, und findet

$$\int U \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \dots df_{n-1} dx_n = \int U \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) df_1 \dots df_{n-2} dx_{n-1} dx_n.$$

Indem man so fortfährt, erhält man endlich

$$\int U df_1 \dots df_n = \int U \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \dots \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

* Die Transformation eines zweifachen Integrals ist zuerst von EULER 1759 Nov. Comm. Petrop. 44, 1 p. 72 gezeigt worden. Bald darauf hat LAGRANGE Mém. de l'Acad. de Berlin 1773 p. 425 die Transformation eines dreifachen Integrals nach einer allgemein anwendbaren Methode ausgeführt. Der allgemeine Ausdruck des transformirten vielfachen Integrals rührt von JACOBI her (Crelle J. 42 p. 38, det. funct. §. 49). Denselben Ausdruck hat auch CARMAN gefunden. Mém. cour. p. l'acad. de Bruxelles t. 14 (1840). Vergl. Bull. de l'acad. de Belgique t. 43, 6.

Das Product der künstlichen die obigen Transformationen voraussetzenden Differentialquotienten ist aber die Functional-determinante von $f_1, f_2, \dots, f_n(2)$.

6. Zu derselben Regel gelangt man unmittelbar durch Verfolgung des Weges, den LAGRANGE (l. c.) bei der Transformation eines dreifachen Integrals eingeschlagen hat¹⁾.

Wenn f_1, f_2, \dots, f_n Funktionen der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n sind, so besteht das System von linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} df_1 &= f_{11} dx_1 + f_{12} dx_2 + \dots + f_{1n} dx_n \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ df_n &= f_{n1} dx_1 + f_{n2} dx_2 + \dots + f_{nn} dx_n. \end{aligned}$$

Durch Auflösung desselben erhält man (§. 8, 1)

$$q_{1k}df_1 + q_{2k}df_2 + \dots + q_{nk}df_n = R_k dx_k,$$

wcdm

$$R_n = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdot & \cdot & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \cdot & \cdot & f_{nn} \end{vmatrix}$$

und φ_{ik} den Coefficienten von f_{ik} d. i. $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R_n bedeutet, so dass insbesondere $\varphi_{nn} = R_{n-1}$ ist (§. 3, 4). Es sei nun

$$\int U \, df_1 \, df_2 \, \dots \, df_n$$

das zu bildende vielfache Integral und U eine gegebene Function von $\int_1, \int_2, \dots, \int_n$.

Wenn man die Reihe der auszuführenden Integrationen mit der Integration in Bezug auf f_n eröffnet, so hat man die Summe der Differentiale Udf_n unter der Bedingung zu suchen, dass f_1, f_2, \dots, f_{n-1} unverändert bleiben. Unter dieser Bedingung ist in dem obigen System von linearen Gleichungen

$$df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \quad \dots, \quad df_{n-1} = 0,$$

folglich

$$R_{n-1} \, df_n = R_n \, dx_n,$$

so dass man df_n durch $\frac{R_n}{R_{n-1}} dx_n$ ersetzen kann. Folglich ist

*) CATALAN l. c. Vergl. Moigno Leçons II p. 223.

$$\int U df_1 \dots df_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 \dots df_{n-1} dx_n,$$

wenn die Grenzen von x_n nach den gegebenen Grenzen von f_n bestimmt werden. Indem man die Entwicklung des so transformirten Integrals mit der Integration in Bezug auf die Variable f_{n-1} beginnt, hat man die Summe der Differentiale $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ zu suchen, während $f_1, f_2, \dots, f_{n-2}, x_n$ unverändert bleiben. Unter dieser Voraussetzung hat man aber

$$df_1 = 0, \dots, df_{n-2} = 0, \quad dx_n = 0,$$

nithin folgendes System von $n-1$ linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= f_{11} dx_1 + \dots + f_{1,n-1} dx_{n-1} \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 &= f_{n-2,1} dx_1 + \dots + f_{n-2,n-1} dx_{n-1} \\ df_{n-1} &= f_{n-1,1} dx_1 + \dots + f_{n-1,n-1} dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich wie oben

$$R_{n-2} df_{n-1} = R_{n-1} dx_{n-1},$$

so dass man df_{n-1} durch $\frac{R_{n-1}}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ und $U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_{n-1}$ durch $U \frac{R_n}{R_{n-2}} dx_{n-1}$ ersetzen kann. Daher ist bei der erforderlichen Begrenzung

$$\int U \frac{R_n}{R_{n-1}} df_1 \dots df_{n-1} dx_n = \int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \dots df_{n-2} dx_{n-1} dx_n.$$

Der gefundene Ausdruck für das gesuchte vielfache Integral lässt sich durch analoge Betrachtungen transformiren, indem man zufolge eines Systems von $n-2$ linearen Gleichungen df_{n-2} durch $\frac{R_{n-2}}{R_{n-3}} dx_{n-2}$ ersetzt, wodurch

$$\begin{aligned} &\int U \frac{R_n}{R_{n-2}} df_1 \dots df_{n-2} dx_{n-1} dx_n \\ &= \int U \frac{R_n}{R_{n-3}} df_1 \dots df_{n-3} dx_{n-2} dx_{n-1} dx_n \end{aligned}$$

wird u. s. w. Endlich findet man auf demselben Wege

$$\int U \frac{R_n}{R_1} df_1 dx_2 \dots dx_n = \int U R_n dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

indem man zuerst in Bezug auf f_1 integrierend vermöge der Bedingungen

$$dx_2 = 0, \quad dx_3 = 0, \quad \dots, \quad dx_n = 0$$

das Differential df_1 durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1$ d. i. $R_1 dx_1$ ersetzt.

7. Wenn f_1, f_2, \dots, f_n nicht unmittelbar als Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n , sondern zunächst als Functionen der p Grössen y_1, y_2, \dots, y_p gegeben sind, welche gegebene Functionen der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n sind, so findet man ihre Functional-determinante wie folgt *). Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial x_k},$$

also

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{ip} b_{pk},$$

wenn

$$c_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}, \quad b_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Bezeichnet man die Determinanten der Elemente a, b durch P, Q und die gesuchte Determinante der Elemente c durch R , so ist nach §. 5, 4, wenn $p < n$,

$$R = 0,$$

d. h. wenn die gegebenen Functionen durch eine kleinere Anzahl von Functionen der Variablen ausgedrückt werden können, so verschwindet die Functional-determinante identisch, wie es nach dem Lehrsatz (3) zu erwarten war.

Wenn $p = n$, so ist $R = PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Wenn $p > n$, so ist $R = \Sigma PQ$, d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_r} & \frac{\partial f_1}{\partial y_s} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_r} & \frac{\partial f_2}{\partial y_s} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial y_s}{\partial x_1} & \frac{\partial y_s}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

*) JACOBI det. funct. §. 44.

Die Glieder dieser Summe werden gebildet, indem man für r, s, \dots alle Combinationen von je n verschiedenen Nummern aus der Reihe $1, 2, \dots, p$ setzt.

8. Wenn f_1, f_2, \dots, f_n nicht explicite als Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n gegeben sind, sondern implicite dadurch, dass n Functionen q_1, q_2, \dots, q_n der Variablen $f_1, f_2, \dots, f_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ verschwinden, so ist *)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_n}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Vermöge der gegebenen Gleichungen

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots, \quad q_n = 0$$

kann jede der Grössen f_1, f_2, \dots, f_n durch die Grössen x_1, x_2, \dots, x_n ausgedrückt werden. Wenn man die gefundenen Werthe in q_i substituirt, so erhält man die Identität $q_i = 0$. Aus derselben folgt durch Differentiation in Bezug auf x_k die Identität

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} + \frac{\partial q_i}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{ik} = b_{i1} a_{1k} + \dots + b_{in} a_{nk},$$

wenn

$$c_{ik} = - \frac{\partial q_i}{\partial x_k}, \quad b_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial f_k}, \quad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man die Determinanten der Elemente c, b, a durch T, S, R , so ist (§. 5, 4)

$$T = SR, \quad R = T : S$$

und zwar (§. 3, 4)

$$T = (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

*) JACOBI det. funct. §. 10.

9. Wenn f_1, f_2, \dots, f_n dadurch als Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n gegeben sind, dass $n+p$ Functionen q_1, q_2, \dots, q_{n+p} der Variablen $f_1, f_2, \dots, f_{n+p}, x_1, x_2, \dots, x_n$ verschwinden, so ist $\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -\frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial q_1}{\partial x_n} & -\frac{\partial q_1}{\partial f_{n+1}} & \dots & -\frac{\partial q_1}{\partial f_{n+p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial q_{n+p}}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial q_{n+p}}{\partial x_n} & -\frac{\partial q_{n+p}}{\partial f_{n+1}} & \dots & -\frac{\partial q_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial f_{n+p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_{n+p}}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_{n+p}}{\partial f_{n+p}} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Vermöge der Gleichungen

$$q_{n+1} = 0, \quad q_{n+2} = 0, \quad \dots, \quad q_{n+p} = 0$$

können $f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+p}$ durch die übrigen Grössen ausgedrückt werden, folglich sind vermöge der Gleichungen

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad \dots, \quad q_n = 0$$

die Grössen f_1, f_2, \dots, f_n durch x_1, x_2, \dots, x_n ausdrückbar. Daher hat man (8) für $i = 1, 2, \dots, n+p$, solange k nicht grösser als n .

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_k} + \frac{\partial q_i}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial q_i}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 0,$$

d. i.

$$c_{ik} = b_{i1} a_{1k} + \dots + b_{in} a_{nk},$$

wenn

$$c_{ik} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_k}, \quad b_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial f_k}, \quad a_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

gesetzt wird. Wenn dagegen k grösser als n , so setze man

$$c_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial f_k} = b_{ik}.$$

Bezeichnet man nun die Determinanten $(n+p)$ ten Grades der Elemente c und b und die Determinante n ten Grades der Elemente a der Reihe nach durch T, S, R , so ist (§. 3, 3)

$$T = SR, \quad R = T : S.$$

*) JACOBI det. funct. §. 43.

Insbesondere ist

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_n}{\partial x_1} & \frac{\partial q_n}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial q_n}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}}.$$

10. Wenn f_1, f_2, \dots, f_n von einander unabhängige Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind, so sind auch x_1, x_2, \dots, x_n von einander unabhängige Functionen von f_1, f_2, \dots, f_n . Die Determinante des Systems f_1, f_2, \dots, f_n und die Determinante des Systems x_1, x_2, \dots, x_n sind reciprok, d. h. ihr Product ist $= 1$ *).

Beweis. Um f_i in Bezug auf f_k zu differentiiiren, müsste man x_1, x_2, \dots, x_n durch f_1, f_2, \dots, f_n ausdrücken und

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial f_k}$$

bilden. Diese Summe beträgt aber 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht, weil f_1, f_2, \dots, f_n von einander unabhängig sind.

Bezeichnet man $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ durch a_{ik} , $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ durch b_{ik} und die erwähnte Summe durch c_{ik} , bezeichnet man die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

durch R, S, T , so ist

$$c_{ik} = a_{11} b_{1k} + \dots + a_{nn} b_{nk},$$

folglich (§. 3, 1) $T = RS$. Nun ist c_{ik} entweder 0 oder 1, je nachdem k von i verschieden ist oder nicht; folglich $T = 1$ (§. 2, 7), d. h.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial f_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix} = 1.$$

* JACOBI det. funct. §. 8. Vergl. MOHR'S Crelle J. 42 p. 116.

11. Wenn R und S die vorige Bedeutung haben und die Coefficienten von $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ in R und von $\frac{\partial x_i}{\partial f_k}$ in S durch α_{ki} und β_{ki} bezeichnet werden, so ist

$$R \frac{\partial x_i}{\partial f_k} = \alpha_{ki}, \quad S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki},$$

$$R \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial f_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_m}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial f_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

$$S \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} & \dots & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial f_{m+1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial f_n} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Nach den angenommenen Bezeichnungen (10) ist

$$\begin{aligned} a_{11} b_{1k} + a_{12} b_{2k} + \dots + a_{1n} b_{nk} &= 0 \\ \dots & \dots \\ a_{k1} b_{1k} + a_{k2} b_{2k} + \dots + a_{kn} b_{nk} &= 1 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} b_{1k} + a_{n2} b_{2k} + \dots + a_{nn} b_{nk} &= 0. \end{aligned}$$

Wenn man diese Identitäten der Reihe nach mit

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \dots, \quad \alpha_{ni}$$

multiplicirt und dann addirt, so erhält man (§. 3, 3)

$$R b_{ik} = \alpha_{ki}.$$

Ferner ist (§. 2)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = R^{m-1} \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Durch Substitution der eben gefundenen Werthe von $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{mm}$ erhält man auf der linken Seite (§. 3, 4)

$$R^m \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

und damit den Inhalt der zweiten Behauptung. Die übrigen Behauptungen folgen aus den bewiesenen, indem man gleichzeitig f mit x , R mit S vertauscht.

12. Wenn t eine Grösse bedeutet, von welcher f_1, f_2, \dots, f_n auf gegebene Weise abhängen, so kann man die Differentialquotienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f_n}{\partial t},$$

welche zunächst Functionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind, von den Variablen f_1, f_2, \dots, f_n abhängig machen, um sie in Bezug auf diese Variablen zu differentiiiren. Die Functionaldeterminante R [10 und 11], welche zunächst eine Function von x_1, x_2, \dots, x_n ist, kann ebenfalls durch f_1, f_2, \dots, f_n ausgedrückt und dann nach t differentiiirt werden. Wenn andererseits u eine Variable bedeutet, von welcher x_1, x_2, \dots, x_n auf gegebene Weise abhängen u. s. w., so ist nach den angenommenen Bezeichnungen *)

$$\frac{\partial}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{\partial \log R}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial f_1} \left(S \frac{\partial f_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial f_2} \left(S \frac{\partial f_2}{\partial t} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial f_n} \left(S \frac{\partial f_n}{\partial t} \right) = 0$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u} = \frac{\partial \log S}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(R \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(R \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(R \frac{\partial x_n}{\partial u} \right) = 0.$$

Insbesondere ist **

$$\frac{\partial \beta_{k1}}{\partial f_1} + \frac{\partial \beta_{k2}}{\partial f_2} + \dots + \frac{\partial \beta_{kn}}{\partial f_n} = 0$$

$$\frac{\partial \alpha_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_{k2}}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial x_n} = 0.$$

Beweis. Nach §. 3, 15 hat man

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial a_{ik}}{\partial t},$$

* Jacobi det. funct. §. 9. Vergl. Jacobi Crelle J. 27 p. 209.

** Jacobi Crelle J. 27 p. 203.

worin nach (11)

$$a_{ik} = R \frac{\partial x_k}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_k}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial f_i} + \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = - \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

folglich

$$\frac{\partial R}{\partial t} = R \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial \log R}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

Ferner ist $RS = 1$ (10), also $\log R + \log S = 0$, und

$$0 = - \frac{\partial \log S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t}.$$

Da die Functionaldeterminante S eine Function der Grössen f_1, f_2, \dots, f_n ist, welche die Variable t enthalten, so hat man

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial S}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial t}.$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\frac{\partial S}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial f_i} \left(S \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)$$

ist, so erhält man die zweite der aufgestellten Identitäten. Die analogen Identitäten ergeben sich durch gleichzeitige Vertauschung von t mit u , f mit x , R mit S .

Wenn insbesondere $t = x_k$, so ist (11)

$$S \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \beta_{ki} \text{ u. s. w.}$$

13. Wenn X, X_1, \dots, X_n gegebene Functionen von x, x_1, \dots, x_n bedeuten, f eine unbestimmte Function derselben Variablen und

$$\psi f = X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ist: wenn ferner n von einander unabhängige Lösungen der linearen partialen Differentialgleichung $\psi f = 0$ durch f_1, f_2, \dots, f_n bezeichnet werden, so dass $\psi f_1, \psi f_2, \dots, \psi f_n$ identisch verschwinden: so lässt sich ein Multiplikator M angeben, durch

welchen ψf) zur Determinante der Functionen f, f_1, \dots, f_n wird. Es ist nämlich

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

folglich $M\psi f = R$, wenn $M = A_i : X_i$. In der That verschwinden R und ψf , wenn für f eine der Functionen f_1, f_2, \dots gesetzt wird. Zuzufolge der in § 12 bewiesenen Eigenschaft der Coefficienten A, A_1, \dots, A_n ist der Multiplikator M eine Lösung der linearen partialen Differentialgleichung

$$-\frac{\partial u X}{\partial x} + \frac{\partial u X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u X_n}{\partial x_n} = 0.$$

Anmerkung. Die durch M bezeichnete Function der Grössen x, x_1, \dots, x_n wird nach JACOBI (l. c.) der Multiplikator der partialen Differentialgleichung $\psi f_j = 0$, oder der partialen Differentialgleichung

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \dots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n},$$

oder des Systems von gemeinen Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \dots : X_n$$

genannt, weil die Auflösungen jener partialen Differentialgleichungen und dieses Systems gemeiner Differentialgleichungen im engsten Zusammenhange stehen. Ist nämlich π eine Lösung der Gleichung $\psi f = 0$ und x dadurch von x_1, x_2, \dots, x_n abhängig gemacht, dass man π einer willkürlichen Constante gleichgesetzt hat, so hat man

$$0 = X \frac{\partial \pi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial \pi}{\partial x_n},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} : \frac{\partial \pi}{\partial x_1} : \frac{\partial \pi}{\partial x_2} : \dots = 1 : -\frac{\partial x}{\partial x_1} : -\frac{\partial x}{\partial x_2} : \dots,$$

$$0 = X - X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} - \dots - X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}.$$

Sind andererseits f_1, f_2, \dots, f_n von einander unabhängige Lösungen der Gleichung $\psi f_1 = 0$ und willkürlichen Constanten gleichgesetzt, so hat man

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n & = & 0 \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n & = & 0 \end{array}$$

und durch Auflösung dieses linearen Systems

$$\begin{aligned} dx : dx_1 : dx_2 : \dots &= A : A_1 : A_2 : \dots \\ &= X : X_1 : X_2 : \dots \end{aligned}$$

§. 13. Lehrsätze von den homogenen Functionen.

1. Wenn u eine homogene Function m ten Grades der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n von m Dimensionen ist, wenn man $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ durch u_i bezeichnet, so ist identisch nach EULER's Theorem *)

$$m u = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n.$$

Indem man denselben Satz auf die homogenen Functionen u_1, u_2, \dots von $m-1$ Dimensionen anwendet und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ durch u_{ik} bezeichnet, erhält man das System von Identitäten **)

$$\begin{array}{rcl} m-1 u_1 & = & u_{11} x_1 + \dots + u_{n1} x_n \\ \cdot & & \cdot \\ m-1 u_n & = & u_{1n} x_1 + \dots + u_{nn} x_n \end{array}$$

2. Nach den angenommenen Bezeichnungen ist

$$m(m-1)u = \sum_{i,k} x_i x_k u_{ik}$$

worin für i und k alle Zahlen von 1 bis n zu setzen sind ***). Wenn man nämlich die obigen Identitäten der Reihe nach mit

*) *Mechanica* 1736 tom. II, §. 106. 497. *Calc. diff.* §. 225.

**) *HESSE Crelle J.* 28 p. 78.

***) *LACROIX Calc. diff.* §. 94.

x_1, x_2, \dots, x_n multiplicirt und addirt, so findet man auf der rechten Seite die angegebene Summe, weil $u_{ik} = u_{ki}$, und auf der linken Seite $m(m-1)u$ nach (I).

Diese und andere Zerlegungen der homogenen Function ergeben sich, wenn man SERRIERS Algèbre supér. Note XII) die Identität

$$f(x_1 + \omega x_1, x_2 + \omega x_2, \dots, x_n + \omega x_n) = (1 + \omega)^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

in Bezug auf ω nach TAYLOR'S Theorem entwickelt, oder HESSE anal. Geom. des Raumes Ste Vorl. I und II, 2 mal, . . . in Bezug auf ω differentiirt und nach der Differentiation $\omega = 0$ setzt.

3. In Folge der in 1) gegebenen Identitäten ist (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nach Weglassung des Factor $m-1$ in der ersten Column (§. 3, 4). Die verschwindende Determinante $(n+1)$ ten Grades kann nach §. 3, 5 als Summe der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1}u & u_1 & \dots & u_n \\ 0 & u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

betrachtet werden. Die erste dieser Determinanten reducirt sich nach §. 2, 5 auf

$$\frac{m}{m-1}u \begin{vmatrix} u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Determinante lässt sich nach §. 3, 17 entwickeln, weil $u_{ik} = u_{ki}$. Setzt man nämlich $v = \sum \pm u_{11} \dots u_{nn}$ und bezeichnet den Coefficienten von u_{ik} in v durch α_{ik} , so dass $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (§. 3, 13), so ist

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = - \sum_{i,k} u_i u_k \alpha_{ik}.$$

Folglich lautet die obige Identität *

$$\frac{m}{m-1} uv - \sum_{i,k} u_i u_k c_{ik} = 0.$$

4. Aus dem System (1)

$$\begin{aligned} - \frac{m-1}{m-1} \frac{mu}{m-1} + u_1 x_1 + \dots + u_n x_n &= 0 \\ - (m-1) u_1 + u_{11} x_1 + \dots + u_{n1} x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ - (m-1) u_n + u_{1n} x_1 + \dots + u_{nn} x_n &= 0 \end{aligned}$$

folgt nach §. 8, 2 die Proportion

$$- (m-1) : x_1 : x_2 : \dots = \beta_i : \beta_{1i} : \beta_{2i} : \dots,$$

wenn die Coefficienten der Elemente $\frac{mu}{m-1}$, u_i , u_{ik} in der verschwindenden Determinante $n+1$ ten Grades

$$R = \begin{vmatrix} \frac{mu}{m-1} & u_1 & \dots & u_n \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

der Reihe nach durch v , β_i , β_{ik} bezeichnet werden. Nun ist $\beta_{ik} = \beta_{ki}$ (§. 3, 13), folglich auch $\beta_i^2 = v \beta_{ii}$ (§. 6, 5) und daher

$$\begin{aligned} - \frac{x_i}{m-1} &= \frac{\beta_{ii}}{\beta_i} = \frac{\beta_i}{v}, \\ \frac{x_i x_k}{(m-1)^2} &= \frac{\beta_{ii} \beta_{ik}}{\beta_i^2} = \frac{\beta_{ik}}{v} \dots \end{aligned}$$

Wenn daher irgend eine partiale Determinante n ten Grades der identisch verschwindenden Determinante R , namentlich die Determinante v , identisch verschwindet, so verschwinden auch die übrigen partialen Determinanten desselben Grades.

5. Die bewiesenen Relationen leisten einen wichtigen Dienst in der Theorie der Krümmung von Linien und Flächen. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x , y eines

* HESSE Crelle J. 38 p. 242.

** Hiernit stimmen die von HESSE Crelle J. 28 p. 103 und 38 p. 242 gegebenen Relationen überein.

Punktes ist, also $f = 0$ die Gleichung der Linie ist, auf welcher der Punkt (x, y) liegt; wenn ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} = f_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22}$$

gesetzt wird, so ist bekanntlich

$$x - \xi : y - \eta = f_1 : f_2$$

die Gleichung für die Normale der Linie $f = 0$ durch den Punkt (x, y) derselben, wobei ξ, η die Coordinaten irgend eines Punktes der Normale bedeuten. Setzt man

$$\lambda (x - \xi) = f_1, \quad \lambda (y - \eta) = f_2,$$

und differentiirt diese Gleichungen, so erhält man

$$f_1 dx + f_2 dy = 0,$$

$$(x - \xi) d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad (y - \eta) d\lambda + \lambda dy = df_2,$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx, \quad f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

für die Normale der Linie $f = 0$ durch den Punkt $(x + dx, y + dy)$, welche mit der ersten Normale den Punkt (ξ, η) gemein hat, d. i. das Centrum der Krümmung, welche die Linie $f = 0$ im Punkte (x, y) hat. Aus dem System

$$0 = f_1 dx + f_2 dy$$

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = f_{11} - \lambda dx + f_{12} dy$$

$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = f_{21} dx + f_{22} - \lambda dy$$

folgt §. 8

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung von λ . Wenn man diese Gleichung nach §. 3, 17 entwickelt, so erhält λ den Coefficienten $f_1^2 + f_2^2$ und das von λ unabhängige Glied ist

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Endlich hat man zur Berechnung des Radius der Krümmung, der durch ϱ bezeichnet wird,

$$\varrho^2 = x - \xi^2 + y - \eta^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2}{\lambda^2}$$

und zur Berechnung der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Die Determinante L ist leichter zu behandeln, wenn die Function, auf welche sie sich bezieht, homogen ist. Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3 , welche mit f identisch wird, wenn $x_3 = 1$, so hat man

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_1 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} \end{vmatrix} = \frac{v}{m-1^2},$$

worin $v = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33}$ und nach der Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen ist.

Die Punkte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, mithin die Krümmung verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte der Linie. Sie erscheinen als Durchschnitte der Linie ($f = 0$ oder $u = 0$) und der Linie ($L = 0$ oder $v = 0$). Nun sind f und u nach Voraussetzung m ten Grades, v aber $3(m-2)$ ten Grades, folglich haben die gedachten Linien im Allgemeinen $3m(m-2)$ Durchschnitte, d. h. eine Linie m ten Grades hat im Allgemeinen $3m(m-2)$ Wendepunkte*).

6. Wenn f eine Function der orthogonalen Coordinaten x, y, z eines Punktes, also $f = 0$ die Gleichung der Fläche ist,

* Dieser Satz ist zuerst von PLÜCKER (Syst. der analyt. Geom. p. 264) aufgestellt worden. Der hier mitgetheilte Beweis rührt von HESSE (l. c.) her. Einen andern Beweis findet man bei JACOB (Crelle J. 40 p. 254).

auf welcher der Punkt (x, y, z) liegt, so ist nach den vorigen Bezeichnungen

$$x - \xi = y - \eta = z - \zeta = f_1 : f_2 : f_3$$

die Gleichung für die Normale der Fläche $(f = 0)$ durch den Punkt (x, y, z) , wofür

$$\lambda(x - \xi) = f_1, \quad \lambda(y - \eta) = f_2, \quad \lambda(z - \zeta) = f_3$$

gesetzt werden kann. Die Normalen der Fläche $(f = 0)$ durch die Punkte (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ schneiden sich im Allgemeinen nicht, sondern nur dann, wenn der zuletzt genannte Punkt auf einer durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinie liegt*. Ihr Durchschnitt (ξ, η, ζ) ist das Krümmungscentrum eines Hauptschnitts der Fläche für den Punkt (x, y, z) . Durch Differentiation der obigen Gleichungen findet man für diesen Fall

$$(x - \xi) d\lambda + \lambda dx = df_1, \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_1 - \lambda dx$$

$$f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_2 - \lambda dy$$

$$f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} = df_3 - \lambda dz.$$

Folglich §. 8. ist

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ f_3 & df_3 & dz \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung, welche in Verbindung mit der Differentialgleichung der gegebenen Fläche

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0$$

die durch den Punkt (x, y, z) gehenden Krümmungslinien bestimmt. Aus dem System der Gleichungen

* Bei genauer Infinitesimalbetrachtung findet man (Schroeter briefl. Mittheilung), dass in diesem Falle der Abstand der Normalen ein Unendlichkleines 3ter Ordnung ist, während der Abstand der Fusspunkte zu den Unendlichkleinen 1ter Ordnung gehört.

$$\begin{aligned}
0 &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \\
f_1 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{11} - \lambda dx + f_{12} dy + f_{13} dz \\
f_2 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{12} dx + f_{22} - \lambda dy + f_{23} dz \\
f_3 \frac{d\lambda}{\lambda} &= f_{13} dx + f_{23} dy + f_{33} - \lambda dz
\end{aligned}$$

folgt zur Bestimmung von λ

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} - \lambda & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} - \lambda & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist zweiten Grades, und zwar hat λ^2 den Coefficienten $-f_1^2 - f_2^2 - f_3^2$, während das von λ unabhängige Glied

$$L = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln derselben Gleichung durch λ', λ'' , so hat man

$$\lambda' \lambda'' = \frac{-L}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Wenn man endlich den Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) von (x, y, z) durch ϱ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= x - \xi^2 + y - \eta^2 + z - \zeta^2 \\
\lambda \varrho &= \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.
\end{aligned}$$

Demnach hat auch ϱ zwei Werthe ϱ', ϱ'' , so dass

$$\lambda' \lambda'' \varrho' \varrho'' = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

Die reciproken Werthe von ϱ' und ϱ'' sind aber die Krümmungen der durch (x, y, z) gehenden Krümmungslinien und der von ihnen berührten Hauptschnitte der Fläche, also ist das Product der Hauptkrümmungen der Fläche ($f = 0$) in dem Punkte (x, y, z)

$$\frac{1}{\varrho' \varrho''} = - \frac{L}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Versteht man unter u die homogene Function der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 , welche mit f identisch wird, wenn $x_4 = 1$ ist, so hat man (4)

$$L = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_2 & u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_3 & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix} = -\frac{v}{m-1} \cdot .$$

Die Punkte der Fläche ($f = 0$ oder $u = 0$), für welche L oder v verschwindet, sind im Allgemeinen Wendepunkte von Hauptschnitten der Fläche. Sie liegen auf dem Durchschnitt der Flächen $f = 0$ oder $u = 0$ und $L = 0$ oder $v = 0$. Nun sind f und u nach Voraussetzung m ten Grades, v aber $(m-2)$ -ten Grades, also liegt die Wendelinie einer Fläche m ten Grades zugleich auf einer bestimmten Fläche $(m-2)$ ten Grades^{*)}.

7. Aus den in (4) gegebenen Identitäten (hat Jacobi^{**)}), veranlasst durch einen von Hesse mitgetheilten Satz, folgendes die mehr erwähnte Determinante

$$v = \Sigma \pm u_{11} \cdot \cdot \cdot u_{nn}$$

betreffende System von Identitäten entwickelt. Zunächst ist wie §. 8

$$v x_i = (m-1) \alpha_{1i} u_1 + \cdot \cdot + \alpha_{ni} u_n ,$$

wenn $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ wie oben (3) den Coefficienten von $u_{ik} = u_{ki}$ in v bedeutet. Indem man diese Identität in Bezug auf x_i oder x_k differentiirt und zur Abkürzung

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = v_k$$

setzt, erhält man

$$v_i x_i = (m-1) \left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_i} u_1 + \cdot \cdot + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_i} u_n \right) + (m-2) v ,$$

$$v_k x_i = (m-1) \left(\frac{\partial \alpha_{1i}}{\partial x_k} u_1 + \cdot \cdot + \frac{\partial \alpha_{ni}}{\partial x_k} u_n \right) ,$$

weil (§. 3, 3)

$$\begin{aligned} \alpha_{1i} u_{1i} + \cdot \cdot + \alpha_{ni} u_{ni} &= v \\ \alpha_{1i} u_{1k} + \cdot \cdot + \alpha_{ni} u_{nk} &= 0 . \end{aligned}$$

^{*)} Hesse l. c.

^{**)} Crelle J. 40 p. 348.

Durch abermalige Differentiation der gefundenen Identitäten, wobei

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} = v_{kl}$$

gesetzt ist, erhält man

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad v_{ik} x_i &= m-1 \left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_i \partial x_k} u_1 + \dots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_i \partial x_k} u_n \right) \\ &- m-1 \left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1i}}{\partial x_k} + \dots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k} \right) + m-1 v_k, \\ v_{kl} x_i &= m-1 \left(\frac{\partial^2 \alpha_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} u_1 + \dots + \frac{\partial^2 \alpha_{ni}}{\partial x_k \partial x_l} u_n \right) \\ &- m-1 \left(\alpha_{1i} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + \dots + \alpha_{ni} \frac{\partial u_{nl}}{\partial x_k} \right), \end{aligned}$$

indem man die Differentiation der Identitäten

$$\begin{aligned} \alpha_{1i} u_{1i} + \dots + \alpha_{ni} u_{ni} &= v \\ \alpha_{1i} u_{1l} + \dots + \alpha_{ni} u_{nl} &= 0 \end{aligned}$$

in Bezug auf x_k zu Hülfe nimmt.

8. Ein System von Werthen der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n , wodurch den beim Verschwinden der Discriminante von u (§. 12, 4) zulässigen Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_n = 0$$

genügt wird, macht die Functionen u (I) und v (7, I), sowie v_1, v_2, \dots, v_n (7, II) verschwinden.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= u_{11} x_1 + \dots + u_{n1} x_n \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 &= u_{1n} x_1 + \dots + u_{nn} x_n \end{aligned}$$

folgt aber (§. 8, 2 und §. 6, 3), wenn α_{ik} die angegebene Bedeutung hat,

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : \dots &= \alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \dots \\ \frac{x_1^2}{\alpha_{11}} &= \frac{x_2^2}{\alpha_{22}} = \dots = \frac{1}{N} \\ N x_i x_k &= \alpha_{ik}. \end{aligned}$$

Durch diese Substitutionen erhält man in [7, III]

$$v_{ik}x_i = - (m-1) Nx_i \left(x_1 \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_n} \right),$$

d. i. nach [1]

$$v_{ik} = - (m-1) (m-2) Nu_{ik},$$

folglich

$$v_{11} : v_{12} : \dots : v_{23} : \dots = u_{11} : u_{12} : \dots : u_{23} : \dots$$

weshalb auch die Determinante $\Sigma \pm v_{11} \dots v_{nn}$ verschwindet^{*)}).

9. Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine Form m ten Grades (quadratisch, cubisch u. s. f.) von n unbestimmten Variablen (binär, ternär u. s. f.) genannt^{**)}. Eine quadratische Form häufig »Form« schlechthin kann durch

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k,$$

eine cubische Form durch

$$\sum_{i,k,l} a_{ikl} x_i x_k x_l \dots$$

dargestellt werden, wobei i, k, l alle Werthe von 1 bis n erhalten und die Grössen a_{ik} , a_{ikl} durch Umstellung ihrer Numern keine Veränderung erleiden. Unter der Determinante einer quadratischen Form versteht man den negativen Werth der aus dem System der Coefficienten gebildeten Determinante (der Discriminante §. 12, 4). Ist also $R = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, so heisst $-R$ die Determinante der Form $u = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$.

Wenn α_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in R bedeutet, so heisst die quadratische Form

$$U = - \sum_{i,k} \alpha_{ik} y_i y_k$$

der Form u adjungirt^{†)}. Nach §. 6, 1 hat man

$$- \Sigma \pm (-\alpha_{11} \dots -\alpha_{nn}) = -R^{n-1},$$

d. h. die Determinante der adjungirten Form ist die $(n-1)$ te Potenz der Determinante der Form.

* Hesse Crelle J. 40 p. 316. Vergl. Jacobi l. c.

** Gauss Disquis. arithm. art. 453 und 266.

† Vergl. Hesse Crelle J. 28 p. 74.

‡ Forma adjuncta. Gauss l. c. 267.

werden (§. 12, 4). Die lineare Substitution heisst unimodular*, wenn ihre Determinante $\equiv 1$ ist.

2. Wenn die linearen Functionen f_1, f_2, \dots, f_n der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen y_1, y_2, \dots, y_n transformirt werden, so ist die Determinante des Systems der transformirten Functionen (§. 12, 4) das Product der Determinante des Systems der gegebenen Functionen mit der Determinante der linearen Substitution**).

Beweis. Es seien

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

die gegebenen linearen Functionen. Durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n \end{aligned}$$

erhält man die transformirten Functionen

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n &= c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n, \end{aligned}$$

worin c_{ik} gefunden wird, indem man x_1, x_2, \dots, x_n der Reihe nach mit $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ multiplicirt, die Producte addirt und in der Summe den Coefficienten von y_k aufsucht:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

Nach §. 3, 1 ist

$$\Sigma \pm c_{11} \dots c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn} \Sigma \pm b_{11} \dots b_{nn}.$$

Anmerkung. Wenn überhaupt die Functionen f_1, \dots, f_n der Variablen x_1, \dots, x_n durch eine lineare Substitution in Functionen der Variablen y_1, \dots, y_n transformirt worden sind,

* SYLVESTER Cambre. and Dubl. math. J. 7 p. 52. Ueber die Construction solcher Determinanten vergl. den oben (§. 3, 8) citirten Aufsatz von HERMITE.

** Vergl. den algebraischen Beweis der Multiplicationsregel (§. 5), z. B. JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 22.

so ist die Functionaldeterminante des transformirten Systems das Product der Functionaldeterminante des gegebenen Systems mit der Determinante der Substitution. Nach §. 12, 7 ist nämlich

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_n}.$$

Nun ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_k} = b_{ik}$, folglich u. s. w.

3. Wenn die Function f der Variablen x_1, \dots, x_n durch die lineare Substitution (1) in eine Function der Variablen y_1, \dots, y_n transformirt worden ist, so ist die Determinante H' der zweiten Differentialquotienten der transformirten Function das Product derselben Determinante H der gegebenen Function mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante B^*). Nach (2) hat man

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \cdot \cdot \cdot b_{nn}$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial y_n} = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \Sigma \pm b_{11} \cdot \cdot \cdot b_{nn}$$

folglich durch Multiplication $H' = HB^2$.

Anmerkung. Wenn die Function f eine quadratische Form (§. 13, 9) bedeutet, so ist die Functionaldeterminante H die Discriminante dieser Form. Daher wird die Discriminante der transformirten Form gefunden, indem man die Discriminante der gegebenen Form mit dem Quadrat der Substitutionsdeterminante multiplicirt **).

4. Unter der Resultante der homogenen ganzen Functionen

$$f(x, y) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \dots$$

$$g(x, y) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} y + \dots$$

wird die aus den Coefficienten $a_m, a_{m-1}, \dots, b_n, b_{n-1}, \dots$ gebildete Formel verstanden, welche oben (§. 11, 5) als die Resultante von $f(x, 1)$ und $g(x, 1)$ angegeben worden ist. Wenn man die Functionen durch die lineare Substitution

*) HESSE Crelle J. 28 p. 89.

**) Diese Bemerkung ist für $n = 2$ von LAGRANGE (Mém. de Berlin 1773 p. 285) gemacht worden, für $n = 3$ von GAUSS (Disq. arithm. 268).

$$x = \lambda u + \mu v, \quad y = \lambda' u + \mu' v$$

transformirt hat, so findet man die auf gleiche Weise zu bildende Resultante der transformirten Functionen, indem man die Resultante der gegebenen Functionen mit der m ten Potenz der Substitutionsdeterminante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ multiplicirt*. Stellt man die gegebenen Functionen durch die Producte

$$a_0x + a_1y \dots r + a_my \quad \text{und} \quad b_0x + b_1y \dots r + b_ny$$

dar, so ist ihre Resultante

$$R = a_m^n b_n^m D a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n.$$

Die Differenz $\beta - \alpha$ ist die Determinante eines Paares von linearen Functionen $x - \beta y$ und $x - \alpha y$, und geht durch die angegebene Substitution in

$$\beta - \alpha = \lambda\mu' - \lambda'\mu$$

über. Daher geht die Resultante R durch dieselbe Substitution in

$$R \lambda\mu' - \lambda'\mu^{mn}$$

über.

Anmerkung. Um die Discriminante der durch die angezeigte Substitution aus $f(x, y)$ entspringenden Function zu finden, hat man die Discriminante der gegebenen Function (§. 11, 19)

$$a_m^{2m-2} J a_1, \dots, a_m^2$$

mit der $m(m-1)$ ten Potenz der Substitutionsdeterminante zu multipliciren, in Betracht dass $J a_1, \dots, a_m^2$ das Product von $m(m-1)$ Differenzen ist.

Es giebt hiernach aus einer oder mehreren homogenen ganzen Functionen abgeleitete homogene ganze Formeln von der Eigenschaft, dass ihr Verhältniss zu den Formeln, die auf dieselbe Weise aus den durch eine lineare Substitution transformirten Functionen abgeleitet werden, eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, mithin den Werth 1 hat, wenn man eine lineare Substitution gebraucht, deren Determinante 1 ist. Die Formeln dieser Art hat CAYLEY a. a. O. unter dem Namen Hyperdeterminanten einer Function oder eines Systems

* Dieser Satz ist in einem umfassenderen Satz BOOLE's enthalten, welchen CAYLEY Crelle J. 30 p. 4 anfuhr. Vergl. JACOB Crelle J. 40 p. 245. SALMON higher plane curves p. 295.

von Functionen in umfassende Betrachtung gezogen. Man nennt die Hyperdeterminanten nach SYLVESTER *Philos. Mag.* 1851, II p. 396 Covarianten oder Invarianten, je nachdem sie ausser den Coefficienten der Functionen auch die Variablen derselben enthalten oder nicht. Z. B. die Functionaldeterminante R des Systems von Functionen f_1, \dots, f_n der Variablen x_1, \dots, x_n ist im Allgemeinen eine Covariante des Systems, weil die Functionaldeterminante des durch eine lineare Substitution, deren Determinante B ist, transformirten Systems den Werth RB hat (2). Wenn das System nur homogene lineare Functionen enthält, so ist R nur aus den Coefficienten des Systems zusammengesetzt, also eine Invariante des Systems. Die HESSE'sche Determinante H einer homogenen ganzen Function von mehr als 2 Dimensionen ist eine Covariante der Function, weil dieselbe Determinante der transformirten Function den Werth HB^2 hat (3). Die Discriminante einer homogenen ganzen Function ist eine Invariante der Function, und die Resultante von zwei binären Formen ist eine Invariante dieses Systems. Vergl. SALMON *Lessons introd. to the modern higher algebra* 1859 deutsch bearb. von FIEDLER 1863, und FIEDLER *Elemente der neuern Geometrie und Algebra* 1862. Eine fundamentale Behandlung der Invariantentheorie hat ARONHOLD *Crelle J.* 62 p. 281 gegeben.

5. Unter den linearen Substitutionen, durch welche man eine gegebene Function transformiren kann, ist besonders eine solche bemerkenswerth, durch welche zugleich auch die Summe der Quadrate der Variablen in die Summe der Quadrate der neuen Variablen transformirt wird. Diese Substitution ist von EULER (*Nov. Comm. Petrop.* 13 p. 73, 20 p. 217), CAHENY (*Exerc. de Math.* 4 p. 140), JACOBI (*Crelle J.* 12 p. 7), CAYLEY (*Crelle J.* 32 p. 119) in Betracht gezogen worden und heisst nach einer Bemerkung des Letztern eine orthogonale Substitution.

Wenn eine Function der Variablen x_1, x_2, \dots, x_n durch eine lineare (orthogonale) Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n &= c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

in eine Function von y_1, y_2, \dots, y_n zu transformiren ist, dergestalt dass

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

so haben die Coefficienten folgende Haupteigenschaften.

I. Für jedes i und k von 1 bis n ist EULEY

$$\begin{aligned} c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \dots + c_{ni}^2 &= 1 \\ c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \dots + c_{ni}c_{nk} &= 0 \end{aligned}$$

zufolge der Identität

$$\begin{aligned} &y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \\ &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n^2 + \dots + c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n^2 \\ &= y_1^2 c_{11}^2 + \dots + c_{n1}^2 + \dots + 2y_1y_2 c_{11}c_{12} + \dots + c_{n1}c_{n2} + \dots \end{aligned}$$

II. Um die transformirte Function in die gegebene zu transformiren, hat man CAUCHY

$$y_i = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \dots + c_{ni}x_n$$

zu substituiren. Denn

$$\begin{aligned} &c_{1i}x_1 + \dots + c_{ni}x_n \\ &= y_1 c_{1i}c_{11} + \dots + c_{ni}c_{n1} + \dots + y_n (c_{1i}c_{1n} + \dots + c_{ni}c_{nn}), \end{aligned}$$

worin der Coefficient von y_i den Werth 1 hat, während die Coefficienten der übrigen Grössen verschwinden (I).

III. Das Quadrat der Determinante einer orthogonalen Substitution ist 1 JACOBI. Denn nach der Multiplicationsregel ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$d_{ik} = c_{1i}c_{1k} + c_{2i}c_{2k} + \dots + c_{ni}c_{nk}.$$

Nun ist $d_{ik} = 0$, $d_{ii} = 1$, folglich reducirt sich die gesuchte Determinante auf ihr Anfangsglied $d_{11}d_{22} \dots d_{nn} = 1$ (§. 2, 7).

IV. Wenn die Determinante der orthogonalen Substitution durch ϵ , der Coefficient von c_{ik} in ϵ durch γ_{ik} bezeichnet wird, so ist JACOBI

$$\gamma_{ik} = \epsilon c_{ik}.$$

Um diese Identität zu finden, multiplicirt man der Reihe nach die Identitäten

$$\begin{aligned}
c_{11}c_{1k} + \dots + c_{n1}c_{nk} &= 0 \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
c_{1k}c_{1k} + \dots + c_{nk}c_{nk} &= 1 \\
\cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
c_{1n}c_{1k} + \dots + c_{nn}c_{nk} &= 0
\end{aligned}$$

mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{in}$. Durch Summirung erhält man

$$\begin{aligned}
c_{ik}(c_{11}\gamma_{i1} + \dots + c_{1n}\gamma_{in}) + \dots + c_{ik}(c_{i1}\gamma_{i1} + \dots + c_{in}\gamma_{in}) \\
+ \dots + c_{nk}(c_{n1}\gamma_{i1} + \dots + c_{nn}\gamma_{in}) = \gamma_{ik}.
\end{aligned}$$

Der Coefficient von c_{ik} ist ε , die Coefficienten der übrigen Grössen c_{1k}, \dots, c_{nk} verschwinden (§. 3, 3).

V. Die Coefficienten der orthogonalen Substitution genügen dem zweiten System von Identitäten (EULER)

$$\begin{aligned}
c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \dots + c_{in}^2 &= 1 \\
c_{i1}c_{k1} + c_{i2}c_{k2} + \dots + c_{in}c_{kn} &= 0.
\end{aligned}$$

Denn nach (IV) ist

$$\varepsilon(c_{i1}c_{k1} + \dots + c_{in}c_{kn}) = \gamma_{i1}c_{k1} + \dots + \gamma_{in}c_{kn}.$$

Dieses Aggregat hat aber den Werth ε oder 0, je nachdem i und k gleich oder ungleich sind (§. 3, 3).

VI. Unter den partialen Determinanten, welche man aus dem System der Coefficienten einer orthogonalen Substitution bilden kann, findet folgender Zusammenhang statt (JACOBI):

$$\begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Denn nach §. 6, 2 hat man

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot & \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^{m-1} \begin{vmatrix} c_{m+1,m+1} & \cdot & \cdot & c_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,m+1} & \cdot & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}$$

und nach (IV)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m1} & \cdot & \cdot & \gamma_{mm} \end{vmatrix} = \varepsilon^m \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & c_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Durch Vergleichung dieser Identitäten ergibt sich die behauptete Identität.

Noch einige weniger nahe liegende Relationen zwischen den Coefficienten einer orthogonalen Substitution haben EULER in der zuerst erwähnten Abhandlung und JACOB CRELLE J. 30 p. 46 angegeben. Vergl. HESSE Crelle J. 37 p. 173.

6. Da die n^2 Coefficienten einer orthogonalen Substitution $\frac{1}{2}n(n+1)$ Gleichungen (3, 1) zu genügen haben, so lassen sie sich als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen

$$\begin{array}{cccc} b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & b_{n-1,n} \end{array}$$

betrachten. In der That hat EULER nicht nur den Weg angezeigt, wie man durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ binäre Transformationen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darstellen könne, sondern er hat auch in den Fällen $n=3$ und $n=4$ diese Coefficienten durch die unbestimmten Grössen rational ausgedrückt. Mit Hülfe der Determinanten ist es CAYLEY (l. c.) gelungen, bei n Variablen die Coefficienten einer orthogonalen Substitution als rationale Functionen von $\frac{1}{2}n(n-1)$ unbestimmten Grössen darzustellen.

Wenn nämlich durch $b_{12}, \dots, b_{n-1,n}$ unbestimmte Grössen bezeichnet werden, wenn man unter den Voraussetzungen

$$b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad b_{11} = b_{22} = \dots = \omega$$

die Determinante

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

bildet und den Coefficienten von b_{ik} in B durch β_{ik} bezeichnet, so hat man

$$c_{ik} = \frac{2\omega\beta_{ik}}{B}, \quad c_{ii} = \frac{2\omega\beta_{ii} - B}{B}$$

als allgemeine Formeln für die Coefficienten einer orthogonalen Substitution, deren Determinante den Werth 1 hat. Die Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante -1 erhält man, indem man im System der gefundenen Coef-

ficienten bei einer ungeraden Anzahl paralleler Reihen die Zeichen ändert.

Beweis. Die Grössen x_1, x_2, \dots, x_n können dadurch von den Grössen y_1, y_2, \dots, y_n abhängig gemacht werden, dass man zugleich

$$x_i = b_{1i} z_1 + \dots + b_{ni} z_n$$

$$y_i = b_{i1} z_1 + \dots + b_{in} z_n$$

setzt. Durch Auflösung der linearen Systeme

$$x_1 = b_{11} z_1 + \dots + b_{1n} z_n \quad y_1 = b_{11} z_1 + \dots + b_{n1} z_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x_n = b_{n1} z_1 + \dots + b_{nn} z_n \quad y_n = b_{1n} z_1 + \dots + b_{nn} z_n$$

findet man (§. 8, 1)

$$B z_i = \beta_{1i} x_1 + \beta_{2i} x_2 + \dots + \beta_{ni} x_n$$

$$B z_i = \beta_{i1} y_1 + \beta_{i2} y_2 + \dots + \beta_{in} y_n.$$

Vermöge der Voraussetzungen $b_{ik} + b_{ki} = 0$, $b_{ii} = \omega$ und des zwischen x_i, y_i und den Grössen z_1, z_2, \dots, z_n angenommenen Zusammenhangs ist aber

$$x_i + y_i = 2\omega z_i,$$

folglich hat man zugleich

$$B y_i = 2\omega \beta_{1i} x_1 + \dots + 2\omega \beta_{ii} x_i - B x_i + \dots + 2\omega \beta_{ni} x_n$$

$$B x_i = 2\omega \beta_{i1} y_1 + \dots + 2\omega \beta_{ii} y_i - B y_i + \dots + 2\omega \beta_{in} y_n,$$

oder abgekürzt

$$y_i = c_{1i} x_1 + \dots + c_{ni} x_n$$

$$x_i = c_{i1} y_1 + \dots + c_{in} y_n.$$

Aus der Identität

$$y_i = c_{1i} c_{11} y_1 + \dots + c_{1n} y_n + \dots + c_{ni} c_{n1} y_1 + \dots + c_{nn} y_n$$

folgen die Identitäten

$$1 = c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \dots + c_{ni}^2$$

$$0 = c_{1i} c_{1k} + c_{2i} c_{2k} + \dots + c_{ni} c_{nk},$$

wodurch diese rationalen Functionen der unbestimmten Grössen $b_{12}, \dots, b_{n-1,n}$ als Coefficienten einer orthogonalen Substitution characterisirt werden (§, I).

Dass die Determinante ε dieser orthogonalen Substitution den Werth 1 (nicht -1) hat, erkennt man durch Bildung des Products εB^{n+1} d. i.

$$\begin{array}{cccc} 2\omega_{i^2_{11}} - B & 2\omega_{i^2_{12}} & 2\omega_{i^2_{13}} & \cdot \\ 2\omega_{i^2_{21}} & 2\omega_{i^2_{22}} - B & 2\omega_{i^2_{23}} & \cdot \\ 2\omega_{i^2_{31}} & 2\omega_{i^2_{32}} & 2\omega_{i^2_{33}} - B & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \cdot \left| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdot \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right|$$

Weil nach §. 3, 3

$$2\omega_{i^2_{11}} b_{k1} + \cdot \cdot + 2\omega_{i^2_{ii}} - B b_{ki} + \cdot \cdot + 2\omega_{i^2_{in}} b_{kn} = B b_{ik}$$

$$2\omega_{i^2_{11}} b_{i1} + \cdot \cdot + 2\omega_{i^2_{ii}} - B b_{ii} + \cdot \cdot + 2\omega_{i^2_{in}} b_{in} = B b_{ii}$$

ist, so hat das Product (§. 5, 4) den Werth B^{n+1} , folglich ist $\varepsilon = 1$.

Wenn man endlich die Coefficienten

$$c_{1i}, c_{2i}, \cdot \cdot \cdot, c_{ni} \quad \text{oder} \quad c_{k1}, c_{k2}, \cdot \cdot \cdot, c_{kn}$$

mit den entgegengesetzten Zeichen versieht, so wechselt die Determinante der Substitution ihr Zeichen, während die charakteristischen Gleichungen (§. I, V)

$$c_{1i}^2 + c_{2i}^2 + \cdot \cdot + c_{ni}^2 = 1$$

$$c_{1i} c_{1k} + c_{2i} c_{2k} + \cdot \cdot + c_{ni} c_{nk} = 0$$

oder

$$c_{k1}^2 + c_{k2}^2 + \cdot \cdot + c_{kn}^2 = 1$$

$$c_{k1} c_{i1} + c_{k2} c_{i2} + \cdot \cdot + c_{kn} c_{in} = 0$$

keine Veränderung erleiden.

Beispiele. Für $n = 2$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2.$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{array}{cc} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{array}.$$

Daher sind die Coefficienten einer binären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 folgende:

$$\begin{array}{cc} \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} & \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \\ -\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} & \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \end{array}.$$

Die orthogonale Substitution

$$\begin{array}{cc} 1 - \lambda^2 & \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \\ \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} & -\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \end{array}$$

hat die Determinante -1 .

Für $n = 3$ findet man (§. 7, 4

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

Die Coefficienten der einzelnen Elemente in B sind

$$\begin{array}{ccc} 1 + \lambda^2 & \nu + \lambda\mu & -\mu + \lambda\nu \\ -\nu + \lambda\mu & 1 + \mu^2 & \lambda + \mu\nu \\ \mu + \lambda\nu & -\lambda + \mu\nu & 1 + \nu^2 \end{array}$$

Demnach findet man folgende Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{B} & 2 \frac{\nu + \lambda\mu}{B} & 2 \frac{-\mu + \lambda\nu}{B} \\ 2 \frac{-\nu + \lambda\mu}{B} & \frac{1 + \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2}{B} & 2 \frac{\lambda + \mu\nu}{B} \\ 2 \frac{\mu + \lambda\nu}{B} & 2 \frac{-\lambda + \mu\nu}{B} & \frac{1 + \nu^2 - \lambda^2 - \mu^2}{B} \end{array}$$

wie schon EULER in der zuerst erwähnten Abhandlung p. 101 angegeben hat. Diese Coefficienten sind von RODRIGUES (Liouv. J. 3 p. 405) aus denselben Formeln abgeleitet worden, welche EULER (Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217) zur Transformation eines dreirechtwinkligen Coordinatensystems aufgestellt hatte. Um die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution von der Determinante -1 zu erhalten, braucht man nur in dem obigen System die Zeichen von einer oder drei Zeilen oder von eben so viel Columnen zu verändern.

Für $n = 4$ findet man

$$B = \begin{vmatrix} \omega & a & b & c \\ -a & \omega & h & -g \\ -b & -h & \omega & f \\ -c & g & -f & \omega \end{vmatrix} = \omega^2 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + g^2 \omega^2,$$

$$\omega g = af + bg + ch.$$

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= \omega^2 + f^2 + g^2 + h^2 \omega^2 & \beta_{12} &= (a\omega + fg - bh + cg)\omega \\
\beta_{21} &= -a\omega - fg + cg - bh\omega & \beta_{22} &= \omega^2 + f^2 + b^2 + c^2 \omega^2 \\
\beta_{31} &= -b\omega - cf - g\theta + ah\omega & \beta_{32} &= -h\omega + fg - ab - c\theta\omega \\
\beta_{41} &= -c\omega + bf - ag - h\theta\omega & \beta_{42} &= g\omega + fh + b\theta - ca\omega \\
\beta_{13} &= b\omega + g\theta - cf + ah\omega & \beta_{14} &= c\omega + h\theta - ag + bf\omega \\
\beta_{23} &= h\omega + fg + c\theta - ab\omega & \beta_{24} &= -g\omega + hf - ac - b\theta\omega \\
\beta_{33} &= \omega^2 + g^2 + c^2 + a^2 \omega^2 & \beta_{34} &= f\omega + gh + a\theta - bc\omega \\
\beta_{43} &= -f\omega + gh - bc - a\theta\omega & \beta_{44} &= \omega^2 + h^2 + a^2 + b^2 \omega^2 \\
Bc_{11} &= [\omega^2 - \theta^2 + f^2 - a^2 + g^2 - b^2 + h^2 - c^2] \omega^2 \\
Bc_{22} &= [\omega^2 - \theta^2 + f^2 - a^2 - g^2 - b^2 - h^2 - c^2] \omega^2 \\
Bc_{33} &= [\omega^2 - \theta^2 - (f^2 - a^2 + g^2 - b^2 - h^2 - c^2)] \omega^2 \\
Bc_{44} &= [\omega^2 - \theta^2 - f^2 - a^2 - g^2 - b^2 + h^2 - c^2] \omega^2
\end{aligned}$$

u. s. f. Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich ohne Weiteres die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution von der Determinante 1 oder -1 aufstellen.

CAYLEY'S System dieser Coefficienten in Crelle J. 32 p. 122 enthält zwei Fehler: in β_{24} steht $-hf$ statt hf , in Bc_{11} , Bc_{22} , ... steht 1 statt $1 - \theta^2$, welche in der neueren Mittheilung CAYLEY'S Crelle J. 50 p. 311 nicht vorkommen. Dagegen ist an dem zuletzt erwähnten Orte p. 312 Z. 5 v. o. der Druckfehler $+\delta\gamma'$ in $-\delta\gamma'$ zu verbessern. Die von CAYLEY gefundenen Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution kommen in anderer Form bei EULER (Nov. Comm. Petrop. 15 p. 102) vor, der sie »nulla certa methodo, sed potius quasi divinando« erhalten hatte. EULER fügt hinzu: »si quis viam directam ad hanc solutionem manducantem investigaverit, insignia certe subsidia analysi attulisse erit censendus.« Es ist CAYLEY nicht entgangen, wie sich aus den von ihm aufgestellten Coefficienten die EULER'sche Lösung ableiten lässt (vergl. Crelle J. 50 p. 312). Setzt man im obigen System

$$\begin{aligned}
\omega &= -\frac{s + d}{2}, & f &= \frac{r + c}{2}, & g &= -\frac{q + b}{2}, & h &= \frac{p - a}{2}, \\
\theta &= \frac{s - d}{2}, & a &= \frac{r - c}{2}, & b &= -\frac{q - b}{2}, & c &= \frac{p - a}{2},
\end{aligned}$$

und ändert man die Zeichen der letzten Horizontalreihe, wodurch die Determinante der orthogonalen Substitution den Werth -1 annimmt, so erhält man EULER'S System ohne irgend eine

Abweichung. Denn das zweite Element der zweiten Horizontalreihe enthält bei EULER nur durch einen Druckfehler $-ds$ statt $+ds$.

7. Die binäre und ternäre orthogonale Substitution ist in der Geometrie gleichbedeutend mit der Transformation der orthogonalen Punktkoordinaten. Um von dem orthogonalen System x, y zu dem orthogonalen System x', y' überzugehen, unter der Voraussetzung, dass x, y, x', y' Richtungen einer Ebene sind, hat man die lineare Substitution zu machen, deren Coefficienten

$$\begin{array}{cc} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{array}$$

sind. Wenn Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, mithin $xy + yx = 0$ ist, so hat man

$$xy' = xx' + x'y', \quad yx' = yx + xx', \quad yy' = yx + x'x' + x'y'.$$

Sind nun die Winkel xy und $x'y'$ beide $= 90^\circ$, so ist

$$\cos xy' = -\sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = \cos xx'.$$

Wenn dagegen $xy = 90^\circ$ und $x'y' = -90^\circ$ ist, so ist

$$\cos xy' = \sin xx', \quad \cos yx' = \sin xx', \quad \cos yy' = -\cos xx'.$$

Daher hat man, wie bekannt, beim Uebergange zu einem System desselben Sinnes die lineare Substitution

$$\begin{array}{cc} \cos xx' & -\sin xx' \\ \sin xx' & \cos xx' \end{array}$$

von der Determinante 1 zu machen; beim Uebergange zu einem System entgegengesetzten Sinnes ist die erforderliche Substitution

$$\begin{array}{cc} \cos xx' & \sin xx' \\ \sin xx' & -\cos xx' \end{array}$$

von der Determinante -1 .

Diese Bemerkungen werden durch ein bekanntes goniometrisches Theorem (s. unten §. 16, 1) bestätigt, nach welchem für beliebige Richtungen einer Ebene x, y, x', y'

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix} = \sin xy \sin x'y'.$$

Diese Determinante ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin xy$ und $\sin x'y'$ einerei Zeichen haben oder nicht.

Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos^2 xx' + \cos^2 xy' &= 1, \\ \cos^2 yx' + \cos^2 yy' &= 1, \\ \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' &= 0,\end{aligned}$$

dass $\sin^2 xy$ und $\sin^2 x'y'$ den Werth 1 haben. Denn nach der Multiplicationsregel (§. 5, 4) ist

$$\sin^2 xy \sin^2 x'y' = \begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' \\ \cos yx' & \cos yy' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Um die angegebenen Substitutionen zu rationalisiren, braucht man nur $\cos xx' = \cos^2 \frac{1}{2} xx' (1 - \tan^2 \frac{1}{2} xx')$ u. s. w. zu benutzen und die Coefficienten der Substitution durch $\tan \frac{1}{2} xx'$ auszudrücken. Vergl. 6 Beispiel 1.

8. Um von dem orthogonalen Coordinatensystem x, y, z zu dem orthogonalen System x', y', z' überzugehen, hat man bekanntlich die lineare Substitution

$$\begin{array}{lll}\cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz'\end{array}$$

zu machen, deren Coefficienten den Gleichungen (5, 1) genügen müssen, mithin Functionen von 3 unbestimmten Grössen sind. Bezeichnet O den gemeinschaftlichen Anfang der Coordinaten und wird die Kugel, deren Centrum O und deren Radius die Längeneinheit ist, von den Richtungen der positiven Coordinaten in X, Y, Z, X', Y', Z' geschnitten, so sind die Coordinatensysteme desselben oder entgegengesetzten Sinnes, je nachdem die sphärischen Dreiecke XYZ und $X'Y'Z'$, oder die Tetraeder $OXYZ$ und $O'X'Y'Z'$ desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind.

1. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und desselben Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Punkt S von solcher Lage, dass

$$SX = SX', \quad SY = SY', \quad SZ = SZ',$$

$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ', \quad XSZ = X'SZ',$$

$$XSX' = YSY' = ZSZ' \text{ *)}.$$

Nach einem elementaren Satze der sphärischen Trigonometrie hat man daher, wenn OS durch s und der Winkel XSX' durch φ bezeichnet wird,

$$\cos xx' = \cos^2 sx + \sin^2 sx \cos \varphi = \cos^2 sx (1 - \cos \varphi) + \cos \varphi$$

$$\cos yy' = \cos^2 sy + \sin^2 sy \cos \varphi = \cos^2 sy (1 - \cos \varphi) + \cos \varphi$$

$$\cos zz' = \cos^2 sz + \sin^2 sz \cos \varphi = \cos^2 sz (1 - \cos \varphi) + \cos \varphi.$$

Wenn man ferner die gleichen Winkel XSY und $X'SY'$ durch ϑ bezeichnet, so hat man nach demselben Satze der Trigonometrie

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy' + \sin sx \sin sy' \cos (\varphi + \vartheta)$$

$$= \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos \varphi \cos \vartheta - \sin sx \sin sy \sin \varphi \sin \vartheta.$$

Da aber

$$\cos xy = \cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos \vartheta = 0,$$

$$\sin sx \sin sy \sin \vartheta = 6 OXY = \sin xy \cos sz = \cos sz,$$

so erhält man

$$\cos xy' = \cos sx \cos sy (1 - \cos \varphi) - \cos sz \sin \varphi.$$

Aus dem Werthe von $\cos xy'$ findet man $\cos yx'$, weil der Winkel $YSX' = YSX + XSX' = -\varphi + \vartheta$ ist, durch Vertauschung von φ mit $-\varphi$

$$\cos yx' = \cos sx \cos sy (1 - \cos \varphi) + \cos sz \sin \varphi.$$

Ebenso ist

$$\cos yz' = \cos sy \cos sz (1 - \cos \varphi) - \cos sx \sin \varphi$$

$$\cos zy' = \cos sy \cos sz (1 - \cos \varphi) + \cos sx \sin \varphi$$

$$\cos zx' = \cos sz \cos sx (1 - \cos \varphi) - \cos sy \sin \varphi$$

$$\cos xz' = \cos sz \cos sx (1 - \cos \varphi) + \cos sy \sin \varphi \text{ **)},$$

*) Vergl. des Verf. Abhandlung über die Gleichheit und Aehnlichkeit u. s. w. Dresden 1852, § 31 und 52, oder Elem. d. Math. 5tes Buch §. 4, 18.

**) Diess sind die von EULER Nov. Comm. Petrop. 20 p. 217 gefundenen Formeln, welche JACOB Crelle J. 2 p. 188 in Erinnerung gebracht hat mit der Aufforderung, dieselben einfacher abzuleiten.

wo von den verfügbaren Grössen sx , sy , sz , q die ersteren durch die Gleichung

$$\cos^2 sx + \cos^2 sy + \cos^2 sz = 1$$

unter einander verbunden sind.

Um diese Substitutionsefficienten zu rationalisiren, führt man $\frac{1}{2}q$ ein und erhält

$$\cos xx' = \cos^2 \frac{1}{2}q + 2 \cos^2 sx \sin^2 \frac{1}{2}q - \sin^2 \frac{1}{2}q$$

$$\cos xy' = 2 \cos sx \cos sy \sin^2 \frac{1}{2}q - 2 \cos sz \sin \frac{1}{2}q \cos \frac{1}{2}q$$

u. s. f. Setzt man

$$\cos sx \tan \frac{1}{2}q = \lambda, \quad \cos sy \tan \frac{1}{2}q = \mu, \quad \cos sz \tan \frac{1}{2}q = r,$$

mithin

$$\tan^2 \frac{1}{2}q = \lambda^2 + \mu^2 + r^2, \quad \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}q} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + r^2,$$

so erhält man das obige System rationaler Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution (6).

II. Bei zwei sphärischen Figuren, wenn sie gleich und ähnlich und entgegengesetzten Sinnes sind, giebt es einen sich selbst entsprechenden Hauptkreis, dessen Pol S seinem Gegenpunkt entspricht, so dass

$$SX + SX' = 180^\circ, \quad SY + SY' = 180^\circ, \quad SZ + SZ' = 180^\circ,$$

$$\text{Winkel } XSY = X'SY', \quad YSZ = Y'SZ', \quad XSZ = X'SZ',$$

$$XSX' = YSY' = ZSZ'.$$

Unter Annahme der vorigen Bezeichnungen hat man

$$\cos xx' = -\cos^2 sx + \sin^2 sx \cos q = -\cos^2 sx (1 + \cos q) + \cos q$$

$$\cos xy' = -\cos sx \cos sy + \sin sx \sin sy \cos q + g$$

$$= -\cos sx \cos sy (1 + \cos q) - \cos sz \sin q$$

u. s. w. Diese Formeln unterscheiden sich von den im vorigen Falle gefundenen nur durch die Zeichen, nachdem q mit $180^\circ - q$ vertauscht worden ist. Der Winkel $180^\circ - q$ ist aber derjenige, welchen das System x' , y' , z' um die Axe s beschreiben muss, damit $X'Y'Z'$ mit der Gegenfigur von XYZ zusammenfällt.

III. Nach v. STAUDT's Theorem (s. unten §. 46, 6) ist für beliebige Winkel und Lagen der coordinirten Axen

$$\begin{vmatrix} \cos xx' & \cos xy' & \cos xz' \\ \cos yx' & \cos yy' & \cos yz' \\ \cos zx' & \cos zy' & \cos zz' \end{vmatrix} = \pm 36 OXYZ \cdot OX'Y'Z'.$$

Folglich ist die Determinante positiv oder negativ, je nachdem diese Tetraeder oder die von den Axen gebildeten Ecken desselben oder entgegengesetzten Sinnes sind. Bei einem orthogonalen System beträgt aber das zugehörige Tetraeder $\frac{1}{6}$ Cubikeinheit, daher ist die Determinante der orthogonalen Substitution 1 oder -1 , je nachdem das neue System mit dem alten desselben oder entgegengesetzten Sinnes ist *).

IV. Umgekehrt schliesst man aus den Gleichungen

$$\cos^2 xx' + \cos^2 xy' + \cos^2 xz' = 1$$

$$\cos^2 yx' + \cos^2 yy' + \cos^2 yz' = 1$$

$$\cos^2 zx' + \cos^2 zy' + \cos^2 zz' = 1$$

$$\cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$

$$\cos xx' \cos zx' + \cos xy' \cos zy' + \cos xz' \cos zz' = 0$$

$$\cos yx' \cos zx' + \cos yy' \cos zy' + \cos yz' \cos zz' = 0,$$

dass die Systeme x, y, z und x', y', z' orthogonal sind **). Denn

$$\pm 36 OXYZ \cdot OX'Y'Z' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

worin nach der Regel für die Multiplication der Determinanten

$$a_{11} = \cos xx' \cos xx' + \cos xy' \cos xy' + \cos xz' \cos xz' = 1$$

$$a_{12} = \cos xx' \cos yx' + \cos xy' \cos yy' + \cos xz' \cos yz' = 0$$

u. s. w., so dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

*) Auf diesen Unterschied der Substitutionsdeterminanten hat JACOBI Crelle J. 43 p. 309 aufmerksam gemacht. Vergl. MOBIUS Statik §. 127, MAGNUS anal. Geom. des Raumes §. 13.

**) DEDEKIND Crelle J. 50 p. 272.

Nun ist $6\ OXYZ = \sin xy \sin xz \sin (xy^{\wedge}xz)$ u. s. w. Das Product der Sinus wird aber nur dann 1, wenn die Winkel recht sind.

9. Wenn c_{11}, \dots, c_{nn} die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bedeuten, deren Determinante ε d. i. entweder 1 oder -1 ist, wenn

$$f(z) = \begin{vmatrix} c_{11} + z & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} + z & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} + z \end{vmatrix}$$

so ist die Gleichung $f(z) = 0$ reciprok und hat mit Ausnahme der Wurzel $-\varepsilon$, welche bei ungeradem n vorhanden ist, keine realen Wurzeln*.

Beweis. Die Entwicklung der Determinante $f(z)$ nach steigenden Potenzen von z (§. 4, 3) giebt vermöge der in (§. VI) bewiesenen Eigenschaft der zu $f(0)$ gehörigen partialen Determinanten ohne Weiteres zu erkennen, dass die Coefficienten von z^0, z^1, z^2, \dots von den Coefficienten von $z^n, z^{n-1}, z^{n-2}, \dots$ sich nur durch den Factor ε unterscheiden, dass also

$$\frac{\varepsilon f(z)}{z^n} = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

was sich durch Multiplication der Determinanten ε und $f(z)$ bestätigen lässt. Demnach ist $f(-\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon^{n-1} f(-\varepsilon)$, also verschwindet $f(-\varepsilon)$, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ueber die Realität der übrigen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ erhält man Aufschluss durch das Product der Determinanten

$$f(z)f(-z) = \begin{vmatrix} d_{11} - z^2 & z d_{12} & z d_{13} & \dots \\ z d_{21} & d_{22} - z^2 & z d_{23} & \dots \\ z d_{31} & z d_{32} & d_{33} - z^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

worin nach der Multiplicationsregel

$$\begin{aligned} d_{ii} - z^2 &= c_{i1}c_{i1} + \dots + c_{ii} + z(c_{i1} - z + \dots + c_{in}c_{in} \\ z d_{ik} &= c_{i1}c_{k1} + \dots + c_{ii} + z(c_{ki} + \dots + c_{ik}(c_{kk} - z + \dots + c_{in}c_{kn} \end{aligned}$$

* BRIOSCI LIORV. J. 49 p. 253.

folglich (5, 1)

$$d_{ii} = 1, \quad d_{ik} = c_{ki} - c_{ik}$$

ist. Daher hat man $d_{ik} + d_{ki} = 0$, und nach §. 7, 6

$$\frac{f(z)}{z^n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} - z & d_{12} & . \\ d_{21} & \frac{1}{z} - z & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{z} - z\right)^n + \left(\frac{1}{z} - z\right)^{n-2} \Sigma D_2 + \dots,$$

wobei die a. a. O. näher beschriebenen Coefficienten der Potenzen von $\frac{1}{z} - z$ positiv sind. Wenn nun z real ist, so ist für gerade oder ungerade n

$$\frac{f(z)f(-z)}{z^n} \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)f(-z)}{z^n \left(\frac{1}{z} - z\right)}$$

positiv, folglich $f(z)$ von Null verschieden.

10. Die orthogonalen Substitutionen gehören zu denjenigen linearen Substitutionen, durch welche überhaupt eine gegebene quadratische Form von n Variablen in ein Aggregat von n Quadraten transformirt wird. Wenn die gegebene Form, die nach §. 13, 9 durch $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ bezeichnet wird, durch die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n \end{aligned}$$

in das Aggregat $p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \dots + p_n y_n^2$ übergeht, so erfolgt die Identität

$$\sum_{i,k} a_{ik} (c_{i1}y_1 + \dots) (c_{k1}y_1 + \dots) = p_1 y_1^2 + \dots + p_n y_n^2$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{i,k} a_{ik} (c_{ir}c_{ks} + c_{is}c_{kr}) = 0, \quad \sum_{i,k} a_{ik} c_{ir}c_{kr} = p_r.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_{is} = a_{i1}c_{1s} + \dots + a_{in}c_{ns},$$

so erhält man bei der Voraussetzung $a_{ki} = a_{ik}$ zur Bestimmung

der Substitution das unzureichende System von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen

$$c_{1r}g_{1r} + \dots + c_{nr}g_{nr} = 0.$$

Aus solchen Grössen c , welche diesem System genügen, bildet man dann

$$c_{1r}g_{1r} + \dots + c_{nr}g_{nr} = p_r,$$

und findet

$$g_{1r}x_1 + \dots + g_{nr}x_n = p_r y_r,$$

$$p_r y_r^2 = \frac{g_{1r}x_1 + \dots + g_{nr}x_n)^2}{g_{1r}c_{1r} + \dots + g_{nr}c_{nr}},$$

so dass nur die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten zu einander in Betracht kommen.

Die Discriminanten der gegebenen und der transformirten Form sind $\Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$ und $p_1 p_2 \dots p_n$. Wenn nun die Determinante der Substitution den Werth ε hat, so ist (3)

$$p_1 \dots p_n = \varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}.$$

Wenn man ferner den Coefficienten des Elements c_{ik} in der Determinante ε durch γ_{ik} bezeichnet, und die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= c_{11}g_{1r} + \dots + c_{n1}g_{nr} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_r &= c_{1r}g_{1r} + \dots + c_{nr}g_{nr} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0 &= c_{1n}g_{1r} + \dots + c_{nn}g_{nr} \end{aligned}$$

der Reihe nach mit $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots$ multiplicirt, so findet man durch Addition

$$p_r \gamma_{ir} = \varepsilon g_{ir}$$

und hiernach wie oben (3)

$$p_1 \dots p_n \Sigma \pm c_{m+1,m+1} \dots c_{nn} = \varepsilon \Sigma \pm g_{11} \dots g_{nn}.$$

11. Die Summe $f = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ von n^2 Gliedern, welche dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Nummern von 1 bis n setzt, und deren Coefficienten a_{ik} einer Beschränkung nicht unterliegen, ist eine homogene lineare Function sowohl der Variablen x_1, \dots, x_n , als auch der Variablen y_1, \dots, y_n , und heisst deshalb eine bilineare Function derselben *).

* JACOBI Crelle J. 53 p. 263. Vergl. CHRISTOFFEL Crelle J. 63 p. 255.

Bildet man die Differentialquotienten

$$u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{i1} y_1 + \dots + a_{in} y_n$$

$$v_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} = a_{1k} x_1 + \dots + a_{nk} x_n$$

so hat man die characteristische Gleichung

$$f = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n = v_1 y_1 + \dots + v_n y_n.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Coefficient a_{11} nicht verschwindet, dass also in u_1 die Variable y_1 , in v_1 die Variable x_1 nicht fehlt, bilde man die bilineare Function

$$f_1 = f - \frac{u_1 v_1}{a_{11}} = \Sigma a'_{ik} x_i y_k$$

welche die Variablen x_1, y_1 nicht mehr enthält, weil

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1} a_{1k}}{a_{11}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 1 gesetzt wird. Mittelt der Differentialquotienten

$$u'_i = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \quad v'_k = \frac{\partial f_1}{\partial y_k}$$

kann ferner unter der Voraussetzung, dass a'_{22} nicht verschwindet, dass also weder y_2 in u'_2 noch x_2 in v'_2 fehlt, die bilineare Function

$$f_2 = f_1 - \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} = \Sigma a''_{ik} x_i y_k$$

gebildet werden, welche auch die Variablen x_2, y_2 nicht mehr enthält, weil der Coefficient

$$a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{i2} a'_{2k}}{a'_{22}}$$

verschwindet, wenn für i oder k die Numer 2 gesetzt wird. Durch fortgesetzte Ausscheidungen der angegebenen Art erhält man die besondere Darstellung

$$f = \frac{u_1 v_1}{a_{11}} + \frac{u'_2 v'_2}{a'_{22}} + \frac{u''_3 v''_3}{a''_{33}} + \dots$$

Die Differentiation ergibt aber

Unter Annahme der Bezeichnungen

$$A_m = \sum \pm a_{11} \dots a_{mm}$$

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} y_m + \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} y_m + \dots \end{vmatrix}$$

$$= A_m y_m + \dots,$$

$$V_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m-1,1} & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \dots & a_{m-1,m} & v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m-1,1} & a_{m1} x_m + \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1m} & \dots & a_{m-1,m} & a_{mm} x_m + \dots \end{vmatrix}$$

$$= A_m x_m + \dots,$$

ergibt sich endlich

$$\frac{u^{(m)}_{m+1} v^{(m)}_{m+1}}{a^{(m)}_{m+1,m+1}} = \frac{U_{m+1} V_{m+1}}{A_m A_{m+1}} = \frac{A_{m+1}}{A_m} x_{m+1} y_{m+1} + \dots,$$

$$f = \frac{U_1 V_1}{A_1} + \frac{U_2 V_2}{A_1 A_2} + \frac{U_3 V_3}{A_2 A_3} + \dots$$

Wenn es demnach eine Anordnung der Variablen einer bilinearen Function giebt, bei der die partialen Determinanten A_1, A_2, A_3, \dots nicht verschwinden, so kann die bilineare Function auf eine bestimmte Weise als Summe von Producten homogener linearer Functionen $U_1 V_1, U_2 V_2, \dots$ so dargestellt werden, dass U_m und V_m von der m ten (und den folgenden) Variablen je einer Schaar abhängen und die vorangehenden Variablen nicht enthalten.

12. Ebenso kann unter den analogen Voraussetzungen die quadratische Form $\sum a_{ik} x_i x_k$, deren Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind, auf eine bestimmte Weise als Aggregat von Quadraten homogener linearer Functionen der Variablen so dargestellt werden, dass die m te Function von der m ten und den folgenden Variablen, aber nicht von den vorangehenden abhängt*. Denn die bilineare Function $f = \sum a_{ik} x_i y_k$ geht in die gegebene quadratische Form über, wenn y_k mit x_k, a_{ki} mit

*) JACOBI Crelle J. 53 p. 270 und 282. Diese Transformation der quadratischen Formen war von GAUSS theor. combin. observ. 34 Comm. Gött. V. 1819, angezeigt worden. Einen Beweis derselben findet man bei BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli.

a_{ik} zusammenfällt. Versteht man nun unter u_i, u'_i, \dots die halben Differentialquotienten §. 13, 1, so hat man (11)

$$f = \frac{U_1^2}{A_1} + \frac{U_2^2}{A_1 A_2} + \dots + \frac{U_n^2}{A_{n-1} A_n}$$

worin $A_m = \sum \pm a_{11} \dots a_{mm}$ eine nicht verschwindende partielle Determinante der Discriminante A_n bedeutet, und

$$U_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} & u_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} & u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} x_m + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} x_m + \dots \end{vmatrix}.$$

Die Anzahl der Quadrate, welche negative Coefficienten haben, ist der Anzahl der Zeichenwechsel gleich, welche die Reihe

$$1, \quad A_1, \quad A_2, \quad \dots, \quad A_n$$

darbietet.

13. Wie man auch die quadratische Form $\sum a_{ik} x_i x_k$ durch reale lineare Substitutionen (10, 12) in Aggregate von Quadraten der neuen Variablen transformirt, so findet sich doch in allen Aggregaten dieselbe Anzahl von positiven und dieselbe Anzahl von negativen Coefficienten der Quadrate ϵ_i . Hat man die gegebene Form durch eine Substitution in das Aggregat

$$p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + \dots + p_n y_n^2$$

und durch eine andre Substitution in das Aggregat

$$q_1 z_1^2 + q_2 z_2^2 + \dots + q_n z_n^2$$

verwandelt, so ist identisch

$$p_1 y_1^2 + \dots + p_n y_n^2 - q_1 z_1^2 - \dots - q_n z_n^2 = 0.$$

Sind nun m Coefficienten des einen Aggregats z. B. p_1, \dots, p_m positiv, die übrigen negativ, so können nicht weniger als m Coefficienten des andern Aggregats positiv sein. Wären z. B.

* Dieses Princip ist von JACOB 1847 erkannt, aber noch nicht veröffentlicht worden. Vergl. den nachgelassenen Aufsatz JACOB'S Crelle J. 53 p. 275 nebst den Mittheilungen von HERMITE und BORCHARDT a. a. O. p. 271 und 281. Dasselbe Princip hat SYLVESTER entdeckt und unter dem Namen »Trägheitsgesetz der quadratischen Formen« bekannt gemacht Philos. Mag. 1852, II p. 140 und Philos. Trans. 1853 p. 481. Durch directe Beziehungen zwischen den Grossen p und q ist der Beweis von BRUSCH geführt worden Nouv. Ann. 1856 Juli.

q_1, \dots, q_{m-1} positiv, und q_m, \dots, q_n negativ, so gäbe es Werthe von x_1, \dots, x_n , durch welche

$$z_1, \dots, z_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_n$$

verschwinden, während

$$p_1 y_1^2 + \dots + p_m y_m^2 - q_m z_m^2 - \dots - q_n z_n^2$$

positiv ist, gegen die Voraussetzung.

Anmerkung. Aus diesem Princip folgt, dass die quadratischen Formen von n Variablen (bei nicht verschwindender Discriminante §. 12, 1) unter einander specifisch verschieden sind je nach den Anzahlen positiver oder negativer Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können. Unter den n Quadraten sind entweder n , oder $n - 1$, oder $n - 2, \dots$ von einerlei Zeichen. Die Formen der ersten Art haben bei realen Werthen der Variablen nur positive oder nur negative Werthe, und heissen deshalb bei Gauss (Disq. arithm. 271) formae definitae, während die Formen der übrigen Arten formae indefinitae genannt werden.

Wenn für $n = 3$ oder $n = 4$ die Verhältnisse von 2 Variablen zu der 3ten oder die Verhältnisse von 3 Variablen zu der 4ten die Coördinaten eines Punktes sind, und die gegebene Form nebst der durch eine lineare Substitution transformirten verschwindet, so sind die zu diesen Gleichungen gehörenden Curven oder Flächen zweiten Grades collinear (homographisch). Aus dem obigen Princip folgt nun, dass Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln ohne Unterschied collinear sind, dass hingegen die Flächen zweiten Grades in 2 Arten zerfallen und nur die Flächen derselben Art collinear sind. Zu der einen Art gehören die Ellipsoide nebst den elliptischen Paraboloiden und Hyperboloiden; die andre Art umfasst die hyperbolischen Hyperboloide und Paraboloiden. Möbius baryc. Calc. p. 314. JACOBI a. a. O. p. 280.

Eine lineare Substitution, durch welche die Form

$$x_1^2 + \dots + x_i^2 - x_{i+1}^2 - \dots - x_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \dots + y_i^2 - y_{i+1}^2 - \dots - y_n^2$$

verwandelt werden soll, kann aus einer orthogonalen Substitu-

tion abgeleitet werden, durch welche man die Form mit lauter positiven Quadraten

$$x_1^2 + \dots + x_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2$$

in die Form

$$y_1^2 + \dots + y_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$$

überführt. Mittelst der für y_{i+1}, \dots, y_n zu machenden Substitutionen werden dann die Variablen x_{i+1}, \dots, x_n durch y_1, \dots, y_n ausgedrückt. JACOB a. a. O. p. 278.

14. Unter einer STURM'schen Reihe wird eine Reihe von Gliedern verstanden, welche durch die in ihr vorhandenen Zeichenwechsel reale Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung anzeigt^{*)}. JACOB und HERMITE haben quadratische Formen angegeben, bei denen die Zählung der positiven und der negativen Quadrate, durch welche sie dargestellt werden können, denselben Dienst leistet, als die Betrachtung einer STURM'schen Reihe.

Aus den von einander verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$, einem gegebenen realen Werth ω und den Unbestimmten x_0, x_1, \dots, x_{m-1} bilde man die Summe

$$H = \sum (\omega - \alpha_j) x_0 + x_1 \alpha_j + \dots + x_{m-1} \alpha_j^{m-1} x_0^2$$

indem man für α die Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ setzt. Jede reale unter der Grenze ω liegende Wurzel liefert ein positives Quadrat in die Summe H . Dagegen ergibt jedes Paar von conjugirt complexen Wurzeln ein positives und ein negatives Quadrat für die Summe H , weil

^{*)} Der nach STURM benannte Lehrsatz ist von demselben der Pariser Academie 1829 Mai 23, ferner in Férussac Bulletin XI p. 419, Choquet et Mayer Algebra 1832 und Mem. pres. 1835 tom. 6 mitgetheilt worden. Vergl. MORSE Liouv. J. 5 p. 75. Die allgemeine Aufstellung einer STURM'schen Reihe verdankt man SALVASTER (Philos. Mag. 1839 Dec.), dessen Angaben von STURM Liouv. J. 7 p. 356 bewiesen, von CAYLEY (Liouv. J. 41 p. 297, 43 p. 269 und JOACHIMSTHAL Crelle J. 48 p. 386) erweitert wurden. Die zur Vertretung einer STURM'schen Reihe dienende quadratische Form ist von HERMITE Compl. rend. 1853, I p. 295 aufgestellt worden, weniger umfassend bereits von JACOB 1847, wie aus einer Mittheilung von BONCHARDT Crelle J. 53 p. 281 hervorgeht. Vergl. SALVASTER Philos. Trans. 1853 p. 484, BRIOSCHI Nouv. Ann. 1856 Juli und die Monographie HATTENDORF über die STURM'schen Functionen, Göttingen 1862.

$$\begin{aligned}
 & (\beta + \gamma V - 1)(P + QV - 1)^2 + (\beta - \gamma V - 1)(P - QV - 1)^2 \\
 & = \frac{2}{\beta} \{ \beta P - \gamma Q^2 - (\beta^2 + \gamma^2) Q^2 \}.
 \end{aligned}$$

Also wird die Anzahl der verschiedenen realen unter oder über der Grenze ω liegenden Wurzeln gefunden, indem man die Anzahl der positiven oder der negativen Quadrate in der Summe H um die Anzahl der verschiedenen Paare von complexen Wurzeln vermindert. Die Anzahl der verschiedenen realen zwischen den Grenzen ω und ω' liegenden Wurzeln ergibt sich darnach unabhängig von der Anzahl der complexen Wurzeln.

In der Summe H hat $x_i x_k$ den Coefficienten

$$t_{ik} = \sum (\omega - \alpha) \alpha^{i+k} = \omega s_{i+k} - s_{i+k+1}$$

wenn man durch s_r die Summe der r ten Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ bezeichnet. Die Grössen s_r sind real und werden aus der Differenz der Quotienten $f'(x) : f(x)$ und $\varphi'(x) : \varphi(x)$ berechnet (§. 10, 6), indem man unter $\varphi(x)$ den Divisor versteht, welchen $f'(x)$ mit $f(x)$ in dem Falle gemein hat, dass die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind (§. 11, 20). Demnach ist $H = \sum t_{ik} x_i x_k$ eine quadratische Form mit realen Coefficienten, deren Glieder dadurch gebildet werden, dass man für i und k alle Nummern von 0 bis $m-1$ setzt, und welche durch je eine bestimmte Anzahl von positiven und negativen Quadraten darstellbar ist (12). Die Discriminante $T_{m-1} = \sum \pm t_{00} \dots t_{m-1, m-1}$ und deren partielle Determinanten T_{m-2}, T_{m-3}, \dots können nach §. 10, 5 berechnet werden.

Anmerkung. Zu dem angegebenen Zweck hat HERMITE (Crelle J. 52 p. 43) die symmetrische Function

$$G(x, y) = \frac{(y - \omega) f(x) f'(y) - (x - \omega) f(y) f'(x)}{y - x}$$

aufgestellt und in die Summe $\sum h_{ik} x^i y^k$ entwickelt, deren Exponenten im Allgemeinen von 0 bis $n-1$ steigen. Dabei ist

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= \frac{f(x) f(y)}{y - x} \left\{ y - \omega \frac{f'(y)}{f(y)} - x - \omega \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} \\
 \frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum \frac{1}{x - \alpha}, \quad \frac{y - \omega}{y - \alpha} - \frac{x - \omega}{x - \alpha} = \frac{y - x}{x - \alpha} \frac{\omega - \alpha}{y - \alpha}, \\
 G(x, y) &= \sum (\omega - \alpha) \frac{f(x)}{x - \alpha} \frac{f(y)}{y - \alpha}.
 \end{aligned}$$

in die Form $(s - s_1)p_1y_1^2 + \dots + (s - s_n)p_ny_n^2$ über, deren Discriminante

$$(s - s_1 \dots s - s_n p_1 \dots p_n = \varepsilon^2 f(s)$$

ist (3). Zugleich hat die Discriminante $p_1 \dots p_n$ der transformirten Form φ den Werth $\varepsilon^2 \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$, also ist

$$f(s) = (s - s_1) \dots (s - s_n) \Sigma \pm a_{11} \dots a_{nn}$$

d. h. s_1, \dots, s_n sind die Wurzeln der Gleichung n ten Grades $f(s) = 0$. In der That sind $s_1\varphi - \psi, s_2\varphi - \psi, \dots$ quadratische Formen mit verschwindenden Discriminanten und von weniger als n Unbestimmten (§. 12, 1).

Setzt man wie oben (10)

$$g_{ik} = a_{i1}c_{1k} + \dots + a_{in}c_{nk}, \quad h_{ik} = b_{i1}c_{1k} + \dots + b_{in}c_{nk},$$

und bezeichnet man den Coefficienten des Elements c_{ik} in ε durch γ_{ik} , so hat man

$$p_k \gamma_{ik} = \varepsilon g_{ik}, \quad s_k p_k \gamma_{ik} = \varepsilon h_{ik}$$

folglich $s_k g_{ik} - h_{ik} = 0$ d. h.

$$(s_k a_{i1} - b_{i1} c_{1k} + \dots + s_k a_{in} - b_{in} c_{nk} = 0.$$

Indem man hierin für i die Nummern 1, 2, \dots, n setzt, erhält man n Gleichungen, vermöge deren (§. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} s_k a_{11} - b_{11} & \dots & s_k a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k a_{n1} - b_{n1} & \dots & s_k a_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{1k} : c_{2k} : \dots : c_{nk} = f s_{k1} : f s_{k2} : \dots : f s_{kn}$$

ist, wenn man den Coefficienten des Elements $s a_{ik} - b_{ik}$ in $f(s)$ durch $f s_{ik}$ bezeichnet. Hiermit bestätigt es sich, dass s_k eine Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Aus den Verhältnissen $c_{1k} : c_{2k} : \dots$ wird $p_k y_k^2$ berechnet (10). Dabei hat man (§. 6, 5)

$$f s_{ik} = f s_{ki}, \quad f s_{r ik}^2 = f s_{r ii} f s_{r kk}.$$

Die lineare Substitution erhält die Determinante 0 und wird deshalb unbrauchbar, wenn die Wurzeln der Gleichung $f s = 0$ nicht alle von einander verschieden sind. Wenn aber diese Wurzeln alle von einander verschieden und z. B. s_1 und s_2 conjugirt complex sind, so sind auch $p_1 y_1^2$ und $p_2 y_2^2$ conjugirt

complex, mithin φ und ψ durch je n Quadrate darstellbar, welche nicht alle dasselbe Zeichen haben 14. Umgekehrt schliesst man: Wenn eine der Formen φ , ψ sich durch n Quadrate von einerlei Zeichen darstellen lässt, und die Gleichung $f's = 0$ lauter verschiedene Wurzeln hat, so sind diese Wurzeln real.

Wenn eine der gegebenen Formen zu der angezeigten Art gehört, so hat die Gleichung $f's = 0$ nur reale Wurzeln auch dann, wenn dieselben nicht alle von einander verschieden sind. Dabei ist eine λ -fache Wurzel der Gleichung $f's = 0$ zugleich eine $\lambda - 1$ -fache Wurzel der Gleichungen $f's_{ik} = 0$, ohne dass die Darstellbarkeit der beiden gegebenen Formen durch die Quadrate derselben n realen linearen Functionen von x_1, \dots, x_n verloren geht, wie WEIERSTRASS a. a. O. bewiesen hat.

Anmerkung. Wenn die beliebige quadratische Form ψ durch n Quadrate insbesondere mittelst einer orthogonalen Substitution dargestellt werden soll, welche die Form $\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ in $y_1^2 + \dots + y_n^2$ verwandelt, so hat die zu diesem Zwecke aufzulösende Gleichung $f's_j = 0$ nur reale Wurzeln, welche aber nicht nothwendig alle von einander verschieden sind. Auf einer solchen Transformation beruht namentlich die Bestimmung der Hauptaxen von Linien und Flächen zweiten Grades, der mechanischen Hauptaxen eines gegebenen Körpers, der säcularen Störungen von Planeten LAPLACE Mém. de Paris 1772, II p. 293 und 362, Die dabei eintretende Realität der Wurzeln der Gleichung $f's = 0$ wurde für den dritten Grad von LAGRANGE Mém. de Berlin 1773 p. 108 bewiesen, allgemein von CAUCHY und JACOBI a. a. O.; auf einem neuen und directen Wege für den dritten Grad von KUMMER (Crelle J. 26 p. 268, Vergl. JACOBI Crelle J. 30 p. 46), allgemein von BORCHARDT LIOUV. J. 12 p. 50. Dieselbe Eigenschaft der Gleichung $f's = 0$ erkennt man nach SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 138) durch Entwicklung des Products $f's f(-s)$, welches für imaginäre Werthe von s durchaus positiv bleibt (vergl. 9). Die neuesten hierzu gehörigen Arbeiten findet man in CHRISTOFFEL'S Abhandlung angeführt.

§. 15. Die Dreiecksfläche und das Tetraedervolum.

1. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn x, y und x_1, y_1 die mit den Axen parallelen Coordinaten der Punkte A und B sind und die Geraden, auf denen OA und OB liegen, wie die Strecken selbst durch r, r_1 bezeichnet werden, wenn ferner die Dreiecksfläche OAB positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Sinn der Drehung, welcher durch die Ordnung der Punkte O, A, B bestimmt ist, mit dem positiven Sinn der Ebene, in welchem positive Winkel derselben beschrieben werden, übereinstimmt oder nicht, so ist *)

$$2 OAB = rr_1 \sin rr_1 = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy.$$

Beweis. Es ergibt sich unmittelbar aus der über das Zeichen der Dreiecksfläche gemachten Voraussetzung, dass $rr_1 \sin rr_1$ auch dem Zeichen nach mit $2 OAB$ übereinstimmt. Man hat aber (§. 3, 4)

$$r^2 r_1^2 \sin^2 rr_1 = \begin{vmatrix} rr & rr_1 \cos rr_1 \\ rr_1 \cos rr_1 & r_1 r_1 \end{vmatrix}.$$

Nun ergibt sich durch orthogonale Projection

$$r \cos rr = x \quad + \quad y \cos xy$$

$$r \cos yr = x \cos xy + y$$

$$r \quad = x \cos xr + y \cos yr$$

$$rr_1 \cos rr_1 = x_1 r \cos xr + y_1 r \cos yr = xr_1 \cos xr_1 + yr_1 \cos yr_1.$$

Nach der Multiplicationsregel (§. 3, 4) ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} xr \cos xr + yr \cos yr & xr_1 \cos xr_1 + yr_1 \cos yr_1 \\ x_1 r \cos xr + y_1 r \cos yr & x_1 r_1 \cos xr_1 + y_1 r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}$$

* Diese Formel ist in einem Theorem VARIGNON'S (Mém. de Paris 1749 p. 66) enthalten. In der gegenwärtigen Gestalt kommt sie bei MONGE vor (J. de l'école polyt. Cah. 15 p. 68), und liegt der Formel für die Fläche eines Polygons zu Grunde, welche GARSS in den Zusätzen zu SCHUMACHER'S Uebersetzung von CARNOT geom. de position gegeben hat. Eine genaue geometrische Ableitung derselben und die Bestimmung der Zeichen findet man in MÖBIUS Statik §. 33.

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r \cos x r & r \cos y r \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher findet man, wenn ε entweder 1 oder -1 ist,

$$r r_1 \sin x r_1 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \sin xy.$$

Wenn y und x_1 verschwinden, so geht r in x , r_1 in y_1 über, Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Wenn der Punkt B dem Punkte A unendlich nahe liegt, so ist

$$r_1 = r + dr, \quad x_1 = x + dx, \quad y_1 = y + dy.$$

Indem man den Winkel xr durch ϑ bezeichnet, erhält man

$$2 OAB = r^2 d\vartheta = \begin{vmatrix} x & y \\ x + dx & y + dy \end{vmatrix} \sin xy = \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \sin xy$$

durch Anwendung von §. 3, 6.

2. Wenn das Volum des Tetraeders $OABC$ durch die Kanten OA , OB , OC und deren Winkel unzweideutig ausgedrückt werden soll, so bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden x , y , z , auf denen die Kanten OA , OB , OC liegen, und demgemäss die Zeichen dieser Kanten: ferner bestimme man willkürlich die positive Richtung der Normale z' der Ebene xy , und demgemäss den positiven Sinn dieser Ebene. Dann ist auch dem Zeichen nach

$$2 OAB = OA \cdot OB \sin xy,$$

und der Abstand der Spitze C von der Ebene der Fläche OAB

$$OC \cos zz',$$

folglich *

$$6 OABC = OA \cdot OB \cdot OC \sin xy \cos zz'.$$

Wenn zur positiven Richtung von x oder y die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OA oder OB und $\sin xy$ das Zeichen. Wenn zur positiven Richtung von z die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln OC und $\cos zz'$ das Zeichen.

* Vergl. Mömms Statik §. 63 und des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 14.

Wenn zur positiven Richtung von z' die entgegengesetzte gewählt wird, so wechseln $\sin xy$ und $\cos zz'$ das Zeichen. Bei jeder Wahl erhält also $OA \cdot OB \cdot OC \sin xy \cos zz'$ dasselbe Zeichen.

In gleicher Weise findet man

$$6 O B A C = O A \cdot O B \cdot O C \sin yx \cos zz'.$$

Nun ist $\sin yx = -\sin xy$, folglich $O B A C = -O A B C$, u. s. w.

3. Der goniometrische Factor, mit welchem das Product der an einer Ecke des Tetraeders liegenden Kanten multiplicirt werden muss, damit man das 6fache Volum des Tetraeders erhält, wird nach v. STAUDT (Crelle J. 24 p. 252) der Sinus der Ecke genannt und durch $\sin xyz$ bezeichnet, wenn die Kanten auf den Geraden x, y, z liegen. Nun ist

$$\sin xyz = \sin xy \sin x\hat{y}z = \sin xy \sin yz \sin xy\hat{y}z,$$

wenn $x\hat{y}z$ und $xy\hat{y}z$ die mit der Ebene xy von der Geraden z und von der Ebene yz gebildeten Winkel bedeuten. In Folge der Gleichung

$$\cos zx - \cos xy \cos yz = \sin xy \sin yz \cos xy\hat{y}z$$

findet man *)

$$\begin{aligned} \sin^2 xyz &= \sin^2 xy \sin^2 yz - [\cos zx - \cos xy \cos yz]^2 \\ &= 4 - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx + 2 \cos xy \cos yz \cos zx \\ &= 4 \sin \frac{xy+xz+yz}{2} \sin \frac{-xy+xz+yz}{2} \sin \frac{xy-xz+yz}{2} \sin \frac{xy+xz-yz}{2}. \end{aligned}$$

Nach §. 3, 47 hat man zugleich

$$\sin^2 xyz = \begin{vmatrix} 4 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 4 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 4 \end{vmatrix}$$

analog der Gleichung

$$\sin^2 xy = \begin{vmatrix} 4 & \cos xy \\ \cos xy & 4 \end{vmatrix}.$$

4. Wenn O den Anfang beliebiger coordinirter Axen bedeutet, wenn $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten

*) EULER NOV. COMM. PETROP. 4 p. 458.

der Punkte A, B, C bedeuten und die Geraden, auf denen OA, OB, OC liegen, wie diese Strecken selbst durch r, r_1, r_2 bezeichnet werden, so ist auch dem Zeichen nach)

$$\sin \angle ABC = r r_1 r_2 \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Beweis. Nach (3) ist

$$r r_1 r_2 \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} r r & r r_1 \cos r r_1 & r r_2 \cos r r_2 \\ r r_1 \cos r r_1 & r_1 r_1 & r_1 r_2 \cos r_1 r_2 \\ r r_2 \cos r r_2 & r_1 r_2 \cos r_1 r_2 & r_2 r_2 \end{vmatrix}.$$

Durch orthogonale Projection ergibt sich aber

$$\begin{aligned} r \cos x r &= x & + y \cos x y & + z \cos x z \\ r \cos y r &= x \cos x y & + y & + z \cos y z \\ r \cos z r &= x \cos x z & + y \cos y z & + z \\ r &= x \cos x r & + y \cos y r & + z \cos z r \\ r r_1 \cos r r_1 &= x_1 r \cos x r & + y_1 r \cos y r & + z_1 r \cos z r \\ &= x r_1 \cos x r_1 & + y r_1 \cos y r_1 & + z r_1 \cos z r_1 \end{aligned}$$

u. s. w. Demnach erhält man durch Anwendung von §. 5, 4 statt der obigen Determinante das Product

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \cos x r & r \cos y r & r \cos z r \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 & r_1 \cos z r_1 \\ r_2 \cos x r_2 & r_2 \cos y r_2 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix}$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix} r \cos x r & r \cos y r & r \cos z r \\ r_1 \cos x r_1 & r_1 \cos y r_1 & r_1 \cos z r_1 \\ r_2 \cos x r_2 & r_2 \cos y r_2 & r_2 \cos z r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos x y & \cos x z \\ \cos x y & 1 & \cos y z \\ \cos x z & \cos y z & 1 \end{vmatrix}.$$

Daher ist, wenn ε entweder 1 oder -1 bedeutet,

$$r r_1 r_2 \sin r r_1 r_2 = \varepsilon \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

* LAGRANGE sur les pyr. 44. Mem. de l'acad. de Berlin 1773 p. 149).
MOSCHLECH MOHRS I. c.

Wenn unter den Coordinaten der in Betracht gezogenen Punkte nur x, y_1, z_2 von Null verschieden sind, während die übrigen verschwinden, so fällt r mit x , r_1 mit y , r_2 mit z zusammen und von der Determinante bleibt nur das Anfangsglied übrig (§. 2, 7). Demnach ist $\varepsilon = 1$.

Anmerkung. Vermöge der Sätze (I) und (I) können die einfachsten der in §. 3, 11 aufgestellten Identitäten geometrisch gedeutet werden.

5. Wenn die Punkte A, B, C in Bezug auf zwei Axen der Ebene ABC durch die Coordinaten $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2$ gegeben sind, so ist *)

$$2ABC = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin xy.$$

Beweis. In Bezug auf ein durch den Anfang A gelegtes System von Axen, welche mit gegebenen Axen einerlei Richtung haben, sind $x_1 - x, y_1 - y; x_2 - x, y_2 - y$ die Coordinaten von B und C , daher ist (1)

$$2ABC = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y \\ x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} \sin xy.$$

Durch Anwendung von §. 2, 6 und §. 3, 6 erhält man statt dieser Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x - x & y - y \\ 1 & x_1 - x & y_1 - y \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel ABC zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt die Dreiecksfläche das Zeichen. In der That erleidet die Determinante der Coordinaten durch Permutation von zwei Zeilen einen Zeichenwechsel (§. 2, 4). Durch Entwicklung der Determinante erhält man die bekannte Identität $ABC = OBC + OCA + OAB$.

Als Bedingung dafür, dass A auf der Geraden BC liegt,

*) Diese bekannte Formel und die entsprechende des folg. Art. kommt in dieser Gestalt bei CAYLEY Camb. math. J. 2 p. 268, JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 23 u. A. vor.

d. h. als Gleichung der Geraden durch B und C ergibt sich, weil $ABC = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Wenn die Punkte A, B, C, D in Bezug auf drei Axen durch die Coordinaten $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ gegeben sind, so ist

$$6ABCD = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Beweis. Legt man durch A ein System von Axen, welche mit den gegebenen Axen einerlei Richtung haben, so sind in Bezug auf dieselben $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z; x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z$; u. s. w. die Coordinaten von B, C, D , daher ist (4)

$$6ABCD = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} \sin xyz.$$

Durch Transformation der Determinante erhält man

$$\begin{vmatrix} 1 & x - x & y - y & z - z \\ 1 & x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ 1 & x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ 1 & x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. So oft man in der Formel $ABCD$ zwei Buchstaben permutirt, so vielmal wechselt das Tetraeder-volum zugleich mit der dafür gefundenen Determinante das Zeichen.

Unter der Bedingung $ABCD = 0$ liegt A auf der Ebene BCD , mithin ist die Gleichung der Ebene BCD

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

wovon die geometrische Bedeutung unmittelbar wahrzunehmen ist.

7. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Tetraederverhältnisse

$$OB CP : OC AP : OA BP : OABC = \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : 1$$

bestimmt^{*)}. Sind nämlich in Bezug auf drei durch O gehende Axen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z$ die Coordinaten von A, B, C, P , so hat man (4)

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mu_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \mu_1 V,$$

u. s. w. Wenn man diese Gleichungen entwickelt und die Coefficienten von x_1, y_1, z_1, \dots in der Determinante V durch $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \dots$ bezeichnet, so findet man

$$\begin{aligned} (4) \quad & \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z = \mu_1 V \\ & \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z = \mu_2 V \\ & \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z = \mu_3 V. \end{aligned}$$

Nun ist (§. 3, 3)

$$\begin{aligned} x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 &= V \\ x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + x_3 \eta_3 &= 0 \end{aligned}$$

u. s. w. Folglich

$$\begin{aligned} (II) \quad x &= \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \\ y &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 \\ z &= \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses $PABC : OABC = \mu$ entwickle man

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

^{*)} LAGRANGE sur les pyr. 28.

d. h. (6 und 4)

$$PABC = OABC - OBCP - OCAP = OABP,$$

$$\text{III} \quad \mu = 1 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3.$$

Aus II und III folgt, wenn a, b, c, d beliebige Größen sind,

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz &= \mu a + \mu_1 a + bx_1 + cy_1 + dz_1 \\ &\quad + \mu_2 a + bx_2 + cy_2 + dz_2 \\ &\quad + \mu_3 a + bx_3 + cy_3 + dz_3. \end{aligned}$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Gleichung zu finden, stelle man die Ebene vor, deren Gleichung $a + bx' + cy' + dz' = 0$ ist. Wird diese Ebene von den Parallelen zu z durch P, O, A, B, C in P', O', A', B', C' geschnitten und hat P' die Coordinaten x, y, z' , so ist

$$\begin{aligned} a + bx + cy + dz' &= 0 \\ a + bx + cy + dz &= dz - z' = d \cdot P'P, \end{aligned}$$

u. s. w. Folglich ist *)

$$\text{IV} \quad P'P = \mu \cdot O'O + \mu_1 \cdot A'A + \mu_2 \cdot B'B + \mu_3 \cdot C'C,$$

wobei unter P', O', A', B', C' die Durchschnitte irgend einer Schaar von Parallelen, die man durch P, O, A, B, C gezogen hat, mit einer beliebigen Ebene verstanden werden können. Demnach erscheint P als Schwerpunkt der in O, A, B, C befindlichen Massen μ, μ_1, μ_2, μ_3 , deren Summe $= 1$.

8. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten von OA, OB, OC , so wird das Tetraeder $OABC$ von den Ebenen A_1BC, AB_1C, ABC_1 halbiert, und der Schwerpunkt P des Tetraeders $OABC$ liegt auf den genannten Halbierungsebenen, so dass

$$A_1BCP = 0, \quad AB_1CP = 0, \quad ABC_1P = 0.$$

Weil A_1 die Coordinaten $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1, \frac{1}{2}z_1$ hat, so ist (6) nach den vorigen Bezeichnungen

*) FEUERBACH Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 5. MORRIS baryc. Calc. cap. 4. Die Grössen μ, μ_1, μ_2, μ_3 sind die barycentrischen Coordinaten (coordinirten Coefficienten) des Punktes P in Bezug auf die Fundamentalpyramide $OABC$ bei MORRIS und FEUERBACH.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}y_1 & \frac{1}{2}z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

u. s. w. Folglich

$$\begin{aligned} 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 &= 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus findet man

$$\mu_1 - \mu_2 = 0, \quad \mu_1 - \mu_3 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3},$$

folglich $\mu = \frac{1}{3}$ und

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3},$$

d. h. der Schwerpunkt des Tetraeders ist die Spitze von 4 gleichen Tetraedern, deren Basen die Flächen des Tetraeders sind, und der Schwerpunkt von 4 gleichen Massen, welche in den Ecken des Tetraeders ihre Schwerpunkte haben^{*)}).

9. Wenn die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in Bezug auf ein System von zwei Axen gegeben sind, so findet man die Fläche des Dreiecks auf folgende Weise^{**)}. Die Coordinaten der Seiten seien $a : b : c$, $a_1 : b_1 : c_1$, $a_2 : b_2 : c_2$, d. h. für jeden Punkt der ersten Seite, dessen Coordinaten x' , y' sind, hat man $a + bx' + cy' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eckpunkte x , y ; x_1 , y_1 ; x_2 , y_2 nebst 3 Hilfsgrößen p , p_1 , p_2 sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + bx + cy &= p & a + bx_1 + cy_1 &= 0 & a + bx_2 + cy_2 &= 0 \\ a_1 + b_1x + c_1y &= 0 & a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 &= p_1 & a_1 + b_1x_2 + c_1y_2 &= 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y &= 0 & a_2 + b_2x_1 + c_2y_1 &= 0 & a_2 + b_2x_2 + c_2y_2 &= p_2 \end{aligned}$$

bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y) auf der zweiten und dritten, aber nicht auf der ersten Geraden liegt, u. s. w. Nach §. 3, 1 ist

*) LAGRANGE sur les pyr. 31—33.

**) JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 23. Zu demselben Resultat und dem entsprechenden des folg. Art. war auf einem andern Wege MINOING Crelle J. 5 p. 397 gelangt.

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Aus den 3 ersten Gleichungen folgt (§. 8, 3. §. 3, 5)

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & b & c \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$R - p c = 0,$$

wenn die Determinante der Liniencoordinaten durch R und der Coefficient des Elements a in R durch α bezeichnet wird. Analog hat man

$$R - p_1 c_1 = 0, \quad R - p_2 c_2 = 0.$$

Daher ist (§. 2, 7)

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \end{vmatrix} = p p_1 p_2 = \frac{R^3}{\alpha \alpha_1 \alpha_2}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{R^2}{\alpha \alpha_1 \alpha_2},$$

mithin 3) die gesuchte doppelte Dreiecksfläche $= \frac{R^2 \sin xy}{\alpha \alpha_1 \alpha_2}$.

Nachdem man auf bekannte Weise die Höhen des Dreiecks, d. h. die Abstände der Punkte (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) von der ersten, zweiten, dritten Geraden berechnet hat, findet man die Seiten des Dreiecks, wenn man die gefundene doppelte Dreiecksfläche durch die Höhen dividirt.

Wenn die Determinante der Liniencoordinaten verschwindet, ohne dass die Elemente einer Zeile zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Elemente einer andern Zeile, so gehen die 3 Geraden durch einen endlich fernen Punkt.

10. Wenn die Gleichungen der Flächen eines Tetraeders in Bezug auf ein System von 3 Axen gegeben sind, so wird das Volum des Tetraeders auf dieselbe Weise gefunden, wie die Dreiecksfläche aus den Seiten. Die Coordinaten der Flächen seien $a : b : c : d$, $a_1 : b_1 : c_1 : d_1$, $a_2 : b_2 : c_2 : d_2$, $a_3 : b_3 : c_3 : d_3$, d. h. für jeden Punkt x', y', z' der ersten Fläche hat man $a + bx' + cy' + dz' = 0$ u. s. w. Die Coordinaten der Eck-

punkte $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ nebst den Hilfsgrössen p, p_1, p_2, p_3 sind durch 4 Systeme von je 4 Gleichungen

$$a + b x + c y + d z = p$$

$$a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z = 0$$

$$a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 z = 0$$

$$a_3 + b_3 x + c_3 y + d_3 z = 0$$

u. s. w. bestimmt, welche ausdrücken, dass der Punkt (x, y, z) auf der zweiten, dritten, vierten, aber nicht auf der ersten Ebene liegt, u. s. w. Nach §. 5, 1 ist

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Aus dem ersten System von 4 Gleichungen folgt

$$\begin{vmatrix} a-p & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad R - p a = 0,$$

wenn R die Determinante der Flächencoordinaten und a der Coefficient ist, welchen a in R hat. Analog ist

$$R - p_1 a_1 = 0, \quad R - p_2 a_2 = 0, \quad R - p_3 a_3 = 0,$$

folglich

$$p p_1 p_2 p_3 = \frac{R^4}{a a_1 a_2 a_3}, \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \frac{R^3}{a a_1 a_2 a_3},$$

und das gesuchte 6fache Tetraedervolum $6V = \frac{R^3 \sin \alpha y z}{a a_1 a_2 a_3}$. Hieraus lassen sich mit Hülfe der Höhen des Tetraeders seine Flächen berechnen.

Wenn die Determinante der Flächencoordinaten verschwindet, ohne dass zwei Zeilen proportionale Elemente enthalten, so gehen die 4 Ebenen durch einen endlich fernen Punkt.

§. 16. Producte von Dreiecksflächen und Tetraedervolumen.

1. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen einer Ebene sind und wie gewöhnlich Winkel von einerlei Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden, so ist

$$\sin ry \sin rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Ohne die Winkel zu verändern, kann man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O legen. Schneidet man auf den Richtungen r, r_1 die Strecken $OA = r, OB = r_1$ ab und sind $x, y; x_1, y_1$ die Coordinaten der Punkte A, B in Bezug auf die Axen x, y , so ist (§. 13, 1)

$$\begin{aligned} rr_1 \sin xy \sin rr_1 &= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy \\ \cos xy & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

woraus nach Division durch rr_1 die Behauptung folgt.

2. Wenn die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 auf einer Ebene liegen, und das Product der Strecken AA_i, BB_k mit dem Cosinus des Winkels ihrer Geraden durch c_{ik} bezeichnet wird, so ist

$$4AA_1A_2 \cdot BB_1B_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Setzt man $AA_1 = x, AA_2 = y, BB_1 = r, BB_2 = r_1$, so erhält man (1)

$$\begin{aligned} 4AA_1A_2 \cdot BB_1B_2 &= xyrr_1 \sin xy \sin rr_1 \\ &= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Um das Product c_{ik} zu berechnen, bestimme man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, auf denen AA_j und BB_k liegen, und demgemäss die Werthe und Zeichen der Strecken und des Cosinus. Wenn als positive Richtung einer Geraden die entgegengesetzte angenommen wird, so wechseln eine Strecke und der Cosinus das Zeichen. Also erhält bei jeder Wahl das Product c_{ik} dasselbe Zeichen.

3. Wenn die Ebenen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 den Winkel φ bilden, so ist nach der angenommenen Bezeichnung

$$[AA_1A_2 : BB_1B_2 \cos \varphi] = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Ist NN_1N_2 die orthogonale Projection von BB_1B_2 auf die Ebene AA_1A_2 , so lässt sich der vorige Lehrsatz auf das Product $[AA_1A_2 : NN_1N_2]$ anwenden. Dabei ist einerseits $NN_1N_2 = BB_1B_2 \cdot \cos \varphi$, und andererseits hat man, indem man die Geraden, auf welchen die Strecken AA_1 , BB_1 , NN_1 liegen, durch a , b , n bezeichnet,

$$AA_1 : NN_1 \cos an = AA_1 : BB_1 \cos ab$$

u. s. w., weil die orthogonalen Projectionen von NN_1 und BB_1 auf die Gerade a von einander nicht verschieden sind.

Das Product $[AA_1A_2 : BB_1B_2 \cos \varphi]$ ist eben so wenig zweideutig, als die dafür gefundene Determinante. Nach beliebiger Annahme des positiven Sinnes in jeder von beiden Ebenen, d. h. des Sinnes der Drehungen, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, hat man die Zeichen der Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 zu bestimmen und dann unter φ den Winkel (oder den entgegengesetzten) zu verstehen, welchen die eine Ebene beschreiben muss, damit positive Dreiecke beider Ebenen einerlei Sinnes werden. Wenn man den positiven Sinn einer Ebene ändert, so erleiden zwei Factoren des obigen Products Zeichenwechsel, nämlich ein Dreieck und $\cos \varphi$, weil φ sich um 180° ändert: also bleibt das Product unverändert.

4. Wenn x, y, r, r_1 beliebige Richtungen des Raumes sind, so ist *)

$$\sin xy \sin rr_1 \cos xy^{\wedge} rr_1 = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \end{vmatrix}.$$

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf ihnen die Strecken $OC = x$, $OD = y$, $OE = r$, $OF = r_1$ ab, so erhält man (3)

*) Dieser Satz, welcher die vorigen von v. STAUDT gefundenen Satze in sich schliesst, ist zuerst von GARSS disqu. gen. circa superf. 2, VI aufgestellt, dann von v. STAUDT Crelle J. 24 p. 252, zuletzt von CACHY Exerc. d'Anal. 4 p. 41 reproducirt worden.

$$xyrr_1 \sin xy \sin rr_1 \cos xy^*rr_1 = \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 \end{vmatrix}$$

woraus nach Weglassung der Factoren $xyrr_1$ die Behauptung folgt.

Anmerkung. Um die Gültigkeit desselben Satzes für 4 beliebige Ebenen nachzuweisen*, hat man den gefundenen Satz auf die positiven Normalen derselben anzuwenden, oder was dasselbe ist, auf die Polarfigur des vorhin erwähnten Vierecks $CDEF$, wenn das letztere als auf einer um das Centrum O beschriebenen Kugel liegend vorgestellt wird. Diese Kugel wird von dem in willkürlich bestimmter Richtung genommenen Durchschnitt der Ebenen in einem Punkte, von jeder Ebene in einem Hauptkreise von willkürlich bestimmtem Sinne geschnitten, ohne dass das Product, dessen Werth durch die Determinante angegeben wird, einer Zweideutigkeit ausgesetzt ist.

5. Wenn man 4 Gerade des Raumes durch a, b, c, d , und die Ebenen ad, bd, cd, bc, ca, ab der Reihe nach durch $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bezeichnet, so folgt aus den Gleichungen (1)

$$\sin ab \sin cd \cos \gamma \gamma_1 = \cos ac \cos bd - \cos bc \cos ad$$

$$\sin bc \sin ad \cos \alpha \alpha_1 = \cos ba \cos cd - \cos ca \cos bd$$

$$\sin ca \sin bd \cos \beta \beta_1 = \cos cb \cos ad - \cos ab \cos cd$$

durch Addition

$$I \quad \sin ab \sin cd \cos \gamma \gamma_1 + \sin bc \sin ad \cos \alpha \alpha_1 + \sin ca \sin bd \cos \beta \beta_1 = 0,$$

weil $\cos ba = \cos ab$ u. s. w. Man bestimmt willkürlich den positiven Sinn jeder Ebene u. s. w. Dieselbe Gleichung gilt für 4 Ebenen a, b, c, d , indem man die Geraden ad, \dots durch α, \dots bezeichnet**). In diesem Falle bestimmt man willkürlich die positiven Richtungen der Geraden, und demgemäss durch Drehungen von einerlei Sinn die Flächenwinkel, deren Kanten die Geraden sind.

Ebenso gilt für 4 Punkte A, B, C, D die Gleichung***)

$$II \quad AB \cdot CD \cos \gamma \gamma_1 + BC \cdot AD \cos \alpha \alpha_1 + CA \cdot BD \cos \beta \beta_1 = 0,$$

* Einen analytischen Beweis dieses polaren Zusatzes hat JOACHIMSTHAL I. c. p. 44 gegeben.

** JOACHIMSTHAL I. c.

*** CARNOT mém. sur la relation qui existe etc. 27.

wenn AD, BD, CD, BC, CA, AB Strecken der Geraden $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bedeuten. Man hat nämlich durch Projection

$$AB \cos \gamma \gamma_1 = AD \cos \alpha \gamma + DB \cos \beta \gamma$$

$$BC \cos \alpha \alpha_1 = BD \cos \beta \alpha + DC \cos \gamma \alpha$$

$$CA \cos \beta \beta_1 = CD \cos \gamma \beta + DA \cos \alpha \beta.$$

Indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit CD, AD, BD multiplicirt und summiert, erhält man die angegebene Relation, weil $AD = -DA$.

Man bezeichne die Ebenen, auf welchen die Flächen des Tetraeders ABC, ACD, CBD, BAD liegen, der Reihe nach durch d, b, a, c , und daher die Geraden, auf denen die Kanten AB, BC, \dots liegen, durch cd, ad, \dots . Dann ist auch dem Zeichen nach (3)

$$\begin{aligned} 6 ABCD \cdot CA &= AB \cdot AC \cdot CA \cdot AD \sin cd \wedge bd \sin bd \wedge bc \sin db \\ &= 4 ABC \cdot ACD \sin bd, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 BAD C \cdot BD &= BA \cdot BD \cdot BD \cdot BC \sin cd \wedge ca \sin ca \wedge ad \sin ca \\ &= 4 BAD \cdot BDC \sin ca. \end{aligned}$$

Nun ist $BADC = ABCD$, $BDC = CBD$, also erhält man durch Multiplication, wenn man das Product der Flächen des Tetraeders durch P bezeichnet,

$$9 ABCD^2 \cdot CA \cdot BD = 4 P \sin ca \sin bd,$$

und daher *)

$$\text{III} \quad \frac{9 ABCD^2}{4 P} = \frac{\sin ca \sin bd}{CA \cdot BD} = \frac{\sin ab \sin cd}{AB \cdot CD} = \frac{\sin bc \sin ad}{BC \cdot AD}.$$

Hieraus erhellt, wie von den Gleichungen (I) und (II) eine aus der andern abgeleitet werden kann.

6. Wenn x, y, z, r, r_1, r_2 beliebige Richtungen im Raume sind, so ist **)

$$\sin x y z \sin r r_1 r_2 = \begin{vmatrix} \cos x r & \cos y r & \cos z r \\ \cos x r_1 & \cos y r_1 & \cos z r_1 \\ \cos x r_2 & \cos y r_2 & \cos z r_2 \end{vmatrix}.$$

*) BRETSCHNEIDER Geometrie §. 677.

**) V. STAUDT l. c. Der besondere Fall, in welchem das System x, y, z orthogonal, also $\sin x y z = \pm 1$ ist, kommt früher bei GAUSS l. c. vor.

Beweis. Legt man die gegebenen Richtungen durch einen Punkt O und schneidet auf denselben die Strecken $OA = r$, $OB = r_1$, $OC = r_2$ ab und sind $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der Punkte A, B, C in Bezug auf die Axen x, y, z , so ist (§. 13, 4)

$$rr_1r_2 \sin xy z \sin rr_1r_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ r_1 \cos xr_1 & r_1 \cos yr_1 & r_1 \cos zr_1 \\ r_2 \cos xr_2 & r_2 \cos yr_2 & r_2 \cos zr_2 \end{vmatrix}$$

woraus durch Weglassung der Factoren rr_1r_2 die Behauptung folgt.

7. Wenn c_{ik} das oben (2) angegebene Streckenproduct bedeutet, so ist *)

$$36 AA_1 A_2 A_3 \cdot BB_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Beweis. Setzt man

$$AA_1 = x, \quad AA_2 = y, \quad AA_3 = z, \\ BB_1 = r, \quad BB_2 = r_1, \quad BB_3 = r_2,$$

so erhält man (6)

$$36 AA_1 A_2 A_3 \cdot BB_1 B_2 B_3 = xyz rr_1r_2 \sin xy z \sin rr_1r_2$$

$$= \begin{vmatrix} xr \cos xr & yr \cos yr & zr \cos zr \\ xr_1 \cos xr_1 & yr_1 \cos yr_1 & zr_1 \cos zr_1 \\ xr_2 \cos xr_2 & yr_2 \cos yr_2 & zr_2 \cos zr_2 \end{vmatrix}$$

8. Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}$$

haben zufolge der in (1, 4, 6) dafür gefundenen Werthe die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie unverändert bleiben,

* v. STAUDT l. c. In dem Falle, dass das zweite Tetraeder vom ersten nicht verschieden, also $c_{ik} = c_{ki}$ ist, erhält man die Formel LAGRANGE's (sur les pyr. 15) und LEGENDRE's (Elem. de géom. Note V, 7.).

wenn die gegenseitige Lage einerseits der Winkel xy, rr_1 , andererseits der Raumwinkel xyz, rr_1r_2 beliebig verändert wird, so lange im ersten Falle auch der Flächenwinkel $xy\hat{y}rr_1$ seine Grösse behält *).

9. Mit Hülfe der Gleichung (6) lässt sich der Abstand von zwei Geraden im Raume, deren Lage in Bezug auf ein beliebiges System x, y, z gegeben ist, berechnen. Sind $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ die Coordinaten der Punkte A, B , welche auf den Geraden r_1, r_2 liegen: sind die Richtungen der Geraden durch ihre Winkel mit den Axen gegeben, so dass der Winkel r_1r_2 berechnet werden kann: ist r die Strecke AB , deren Coordinaten $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$ sind, und d der gesuchte Abstand der Geraden r_1, r_2 : zieht man endlich $AC = 1$ in der Richtung r_2 und $AA' = 1$ auf der Geraden r_1 , so ist

$$6 \text{ } AA'CB = d \sin r_1r_2 = r \sin rr_1r_2,$$

folglich

$$d \sin xyz \sin r_1r_2 = \begin{vmatrix} r \cos xr & r \cos yr & r \cos zr \\ \cos xr_1 & \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix},$$

worin

$$r \cos xr = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \cos xy + (z_2 - z_1) \cos xz$$

$$r \cos yr = (x_2 - x_1) \cos xy + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1) \cos yz$$

$$r \cos zr = (x_2 - x_1) \cos xz + (y_2 - y_1) \cos yz + (z_2 - z_1).$$

Die Entwicklung giebt **)

$$\begin{aligned} d \sin xyz \sin r_1r_2 = & \alpha + \beta \cos xy + \gamma \cos xz (x_2 - x_1) \\ & + (\alpha \cos xy + \beta + \gamma \cos yz) (y_2 - y_1) \\ & + (\alpha \cos xz + \beta \cos yz + \gamma) (z_2 - z_1), \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\alpha = \begin{vmatrix} \cos yr_1 & \cos zr_1 \\ \cos yr_2 & \cos zr_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} \cos zr_1 & \cos xr_1 \\ \cos zr_2 & \cos xr_2 \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} \cos xr_1 & \cos yr_1 \\ \cos xr_2 & \cos yr_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt wird.

*) CAUCHY Exerc. d'anal. 4 p. 51.

**) CAUCHY leçons sur les appl. du calc. inf. Prelim. (102).

10. Für 3 Richtungen einer Ebene a, b, c hat man

$$\sin ab + \sin bc + \sin ca^2 = 8 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{1}{2} ab & \sin^2 \frac{1}{2} ac \\ \sin^2 \frac{1}{2} ab & 0 & \sin^2 \frac{1}{2} bc \\ \sin^2 \frac{1}{2} ac & \sin^2 \frac{1}{2} bc & 0 \end{vmatrix},$$

und für 4 Richtungen des Raumes (oder Ebenen) a, b, c, d

$$\begin{aligned} & \sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc^2 \\ &= -16 \begin{vmatrix} 0 & \sin^2 \frac{1}{2} ab & \sin^2 \frac{1}{2} ac & \sin^2 \frac{1}{2} ad \\ \sin^2 \frac{1}{2} ab & 0 & \sin^2 \frac{1}{2} bc & \sin^2 \frac{1}{2} bd \\ \sin^2 \frac{1}{2} ac & \sin^2 \frac{1}{2} bc & 0 & \sin^2 \frac{1}{2} cd \\ \sin^2 \frac{1}{2} ad & \sin^2 \frac{1}{2} bd & \sin^2 \frac{1}{2} cd & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

welche Determinanten nach §. 3, 17 entwickelt werden können^{*)}.

Beweis. Indem man zwei Axen x, y zu Hülfe nimmt, bei welchen $\sin xy = 1$ ist, erhält man (1)

$$\sin bc = \begin{vmatrix} \cos xb & \cos yb \\ \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich §. 3, 2)

$$\begin{aligned} \sin ab + \sin bc + \sin ca &= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}, \\ &= \sin ab + \sin bc + \sin ca^2 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & \cos xa & \cos ya \\ -1 & \cos xb & \cos yb \\ -1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man dieses Product durch $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$, so ist (§. 3, 4)

$$\begin{aligned} h_{11} &= -1 + \cos^2 xa + \cos^2 ya = 0 \\ h_{12} &= -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb \\ &= -1 + \cos ab = -2 \sin^2 \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

u. s. w. Nach Division von $\Sigma \pm h_{11} h_{22} h_{33}$ durch $(-2)^3$ erhält man die erste angegebene Gleichung.

* Der plan-trigonometrische Satz ist in den Lehrbüchern anzutreffen. Der entsprechende polyedrometrische Satz ist von JOHANNESVAL I. C. (47) ohne genauere Angabe der Zeichen aufgestellt und bewiesen worden.

Indem man ferner drei Axen x, y, z gebraucht, bei welchen $\sin xyz = 1$ ist, erhält man (6)

$$\sin abc = \begin{vmatrix} \cos xa & \cos ya & \cos za \\ \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ \cos xc & \cos yc & \cos ze \end{vmatrix}$$

u. s. w., folglich

$$\begin{aligned} & \sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos yc & \cos ze \\ 1 & \cos xd & \cos yd & \cos zd \end{vmatrix} \end{aligned}$$

und durch ein dem vorigen analoges Verfahren

$$-(\sin abd + \sin bcd + \sin cad - \sin abc)^2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix},$$

worin

$$\begin{aligned} h_{11} &= -1 + \cos^2 xa + \cos^2 ya + \cos^2 za = 0 \\ h_{12} &= -1 + \cos xa \cos xb + \cos ya \cos yb + \cos za \cos zb \\ &= -1 + \cos ab = -2 \sin^2 \frac{1}{2} ab \end{aligned}$$

u. s. w. Wenn man diese Determinante durch $(-2)^4$ dividirt, so erhält man die zweite angegebene Gleichung.

11. Wenn man durch a, b, c die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC eines Kreises liegen, durch r die Länge eines Radius und durch f, g, h die Quadrate der Seiten BC, CA, AB des eingeschriebenen Dreiecks ABC : wenn man beide Seiten der ersten in (10) aufgestellten goniometrischen Gleichungen mit $8r^6$ multiplicirt und bemerkt, dass

$$r^2 \sin ab = 2 OAB, \quad 4r^2 \sin^2 \frac{1}{2} ab = h,$$

u. s. w., so erhält man die althekannte Gleichung

$$(4r \cdot ABC)^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & h & g \\ h & 0 & f \\ g & f & 0 \end{vmatrix} = fgh.$$

Wenn man durch a, b, c, d die Geraden bezeichnet, auf denen die Radien OA, OB, OC, OD einer Kugel liegen, durch r

die Länge eines Radius, durch f, g, h die Quadrate der Kanten BC, CA, AB , durch f', g', h' die Quadrate der gegenüberliegenden Kanten AD, BD, CD des jener Kugel eingeschriebenen Tetraeders $ABCD$; wenn man beide Seiten der zweiten in 10 aufgestellten Gleichung mit $16r^3$ multiplicirt und erwägt, dass

$$r^3 \sin abd = 6 OABD, \quad 4r^3 \sin^2 \frac{1}{2} ab = h,$$

u. s. w., so erhält man

$$24r \cdot ABCD^2 = - \begin{vmatrix} 0 & h & g & f' \\ h & 0 & f & g' \\ g & f & 0 & h' \\ f' & g' & h' & 0 \end{vmatrix}$$

zur Berechnung des Radius (der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Kanten und dem Volum *).

12. Das öfter gebrauchte Product von zwei Strecken mit dem Cosinus des von ihren Geraden gebildeten Winkels lässt sich durch Quadrate der die Endpunkte der Strecken verbindenden Geraden ausdrücken, wodurch die Producte von Polygonen und Polyedern bemerkenswerthe Formen erhalten.

Nach den in (3, II) festgesetzten Bezeichnungen ist

$$2AB \cdot CD \cos \gamma\gamma_1 = 2AD \cdot CD \cos \alpha\gamma - 2BD \cdot CD \cos \beta\gamma$$

Nun hat man allgemein

$$\begin{aligned} 2AD \cdot CD \cos \alpha\gamma &= AD^2 + CD^2 - AC^2 \\ 2BD \cdot CD \cos \beta\gamma &= BD^2 + CD^2 - BC^2, \end{aligned}$$

folglich **

$$2AB \cdot CD \cos \gamma\gamma_1 = AD^2 - BD^2 - (AC^2 - BC^2).$$

13. Bezeichnet man durch d_{ik} das Quadrat der Strecke $A_i B_k$, so ist für zwei Dreiecke, deren Ebenen den Winkel φ bilden,

* In diese Form ist die von JENSEN, Biographie von Guhrauer 1850 p. 297, und neuerlich von CARNOT, Mem. sur la relation, 12, gefundene Relation durch JOACHIMSTHAL, l. c. 27, gebracht worden. Eine geometrische Ableitung derselben hat v. STAUDT, Crelle J. 57 p. 88 gegeben.

** CARNOT l. c.

$$16 A_1 A_2 A_3 \cdot B_1 B_2 B_3 \cos q = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}$$

worin sich die ersten Nummern auf das erste Dreieck, die zweiten Nummern auf das zweite Dreieck beziehen *).

Beweis. Nach (3) ist in der angegebenen Bezeichnung

$$16 A_1 A_2 A_3 \cdot B_1 B_2 B_3 \cos q = \begin{vmatrix} 2 c_{22} & 2 c_{32} \\ 2 c_{23} & 2 c_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun ist (12)

$$2 c_{ik} = d_{1k} - d_{ik} - d_{11} - d_{ii}.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12} - d_{22} - d_{11} - d_{21} & d_{12} - d_{32} - d_{11} - d_{31} \\ d_{13} - d_{23} - d_{11} - d_{21} & d_{13} - d_{33} - d_{11} - d_{31} \end{vmatrix}$$

lässt sich nach §. 2, 6 und §. 3, 6 transformiren in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11} - d_{21} - d_{11} - d_{21} & d_{11} - d_{31} - d_{11} - d_{31} \\ 1 & d_{12} - d_{22} - d_{11} - d_{21} & d_{12} - d_{32} - d_{11} - d_{31} \\ 1 & d_{13} - d_{23} - d_{11} - d_{21} & d_{13} - d_{33} - d_{11} - d_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & d_{11} - d_{21} & d_{11} - d_{31} \\ 1 & d_{12} - d_{22} & d_{12} - d_{32} \\ 1 & d_{13} - d_{23} & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ d_{11} & 1 & d_{11} - d_{21} & d_{11} - d_{31} \\ d_{12} & 1 & d_{12} - d_{22} & d_{12} - d_{32} \\ d_{13} & 1 & d_{13} - d_{23} & d_{13} - d_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Zusätze. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3 der Reihe nach mit den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenfallen, so wird $\cos q = 1$, $d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$, folglich

$$16 A_1 A_2 A_3^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit dem alten Ausdruck der Dreiecksfläche durch die Seiten (vergl. §. 3, 17).

*) Diese Form hat der Satz, welchen v. STARDT l. c. zuerst aufgestellt hat, durch SYLVESTER (Philos. Mag. 1852, II p. 333) erhalten. Aehnliche Determinanten hatte CAYLEY gebildet. Vergl. unten §. 17, 9 und 12.

Die Bedingung, dass A_1, A_2, A_3 auf einer Geraden liegen, lautet

$$= 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Bei jeder Lage eines Punktes auf der Geraden durch die beiden andern Punkte verschwindet je ein Factor der Determinante.

Da die Fläche des ebenen Vierecks

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = A_1 A_2 A_3 + A_1 A_3 A_4$$

ist, so hat man für zwei ebene Vierecke, deren Ebenen den Winkel φ einschliessen,

$$\begin{aligned} & 16 A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 B_4 \cos \varphi \\ &= 16 A_1 A_2 A_3 \cdot B_1 B_2 B_3 \cos \varphi + 16 A_1 A_2 A_3 \cdot B_1 B_3 B_4 \cos \varphi \\ &+ 16 A_1 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 \cos \varphi + 16 A_1 A_3 A_4 \cdot B_1 B_3 B_4 \cos \varphi \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{13} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Sind demnach A und B die Flächen ebener Polygone von m und n Seiten, deren Ebenen den Winkel φ bilden, so ist $AB \cos \varphi$ die negative Summe von $(m-2)(n-2)$ Determinanten vierten Grades von der angegebenen Art, also eine ganze Function von den Quadraten der Strecken, welche die Eckpunkte des einen Polygons mit denen des andern verbinden*).

14. Wenn d_{ik} das Quadrat der Strecke $A_i B_k$ bedeutet, so ist für zwei Tetraeder

* v. STAUDT l. c.

$$288 A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 B_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

worin die ersten Numern auf das erste Tetraeder, die zweiten Numern auf das zweite Tetraeder sich beziehen.

Beweis. Das gesuchte Product ist nach 7) die Determinante

$$\begin{vmatrix} d_{12}-d_{22}-d_{11}-d_{21} & d_{12}-d_{32}-d_{11}-d_{31} & d_{12}-d_{42}-d_{11}-d_{41} \\ d_{13}-d_{23}-d_{11}-d_{21} & d_{13}-d_{33}-d_{11}-d_{31} & d_{13}-d_{43}-d_{11}-d_{41} \\ d_{14}-d_{24}-d_{11}-d_{21} & d_{14}-d_{34}-d_{11}-d_{31} & d_{14}-d_{44}-d_{11}-d_{41} \end{vmatrix},$$

welche sich auf die (13) angegebene Weise in

$$\begin{vmatrix} 1 & d_{11}-d_{21} & d_{11}-d_{31} & d_{11}-d_{41} \\ 1 & d_{12}-d_{22} & d_{12}-d_{32} & d_{12}-d_{42} \\ 1 & d_{13}-d_{23} & d_{13}-d_{33} & d_{13}-d_{43} \\ 1 & d_{14}-d_{24} & d_{14}-d_{34} & d_{14}-d_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{21} & d_{31} & d_{41} \\ 1 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & d_{42} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{43} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} \end{vmatrix}$$

transformiren lässt.

Zusätze. Wenn die Punkte B_1, B_2, B_3, B_4 der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, A_4 zusammenfallen, so wird $d_{ik} = d_{ki}$, $d_{ii} = 0$, folglich

$$288 A_1 A_2 A_3 A_4^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man diese Determinante nach §. 3, 17 entwickelt, so erhält man die bekannte von JUNGKUS (vergl. 11) und später von EULER (Nov. Comm. Petrop. 4 p. 158) aufgestellte Formel zur Berechnung des Tetraedervolums aus den Kanten.

Die Bedingung, unter welcher die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 auf einer Ebene liegen, lautet

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

übereinstimmend mit der Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte einer Ebene verbinden (JACOBUS und EULER Acta Petrop. 6, 1 p. 3).

Eine mehrseitige Pyramide ist die Summe von dreiseitigen Pyramiden, welche die Spitze der mehrseitigen Pyramide zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Dreiecke sind, aus denen die Basis der mehrseitigen Pyramide besteht. Ein Polyeder ist die Summe der Pyramiden, welche einen Eckpunkt des Polyeders zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Flächen des Polyeders sind. Demnach lässt sich das Product der Volume von zwei Polyedern als Summe von Producten aus jedesmal zwei Tetraedern betrachten und als Summe von Determinanten fünften Grades der angegebenen Art darstellen. Das Product aus zwei Polyedern ist also eine ganze Function von den Quadraten der Strecken, welche die Eckpunkte des einen Polyeders mit denen des andern verbinden, wie v. STAUDT bemerkt hat.

15. Wenn man den Coefficienten des Elements c_{ik} (7) in der Determinante $\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33}$ durch γ_{ik} bezeichnet, so hat man nach §. 6, 1

$$\Sigma \pm \gamma_{11} \gamma_{22} \gamma_{33} = \Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33}^2$$

mithin γ_j

$$36 AA_1 A_2 A_3 \cdot BB_1 B_2 B_3 \gamma_j^2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Elemente $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{33}$ sind Flächenproducte von der in (3) betrachteten Art, nämlich

$$\gamma_{11} = \Sigma \pm c_{22} c_{33} = 4 AA_2 A_3 \cdot BB_2 B_3 \cos_{11}$$

$$\gamma_{12} = \Sigma \pm c_{23} c_{31} = 4 AA_2 A_3 \cdot BB_3 B_1 \cos_{12}$$

u. s. w., wo $\cos_{11}, \cos_{12}, \dots$ die Cosinus der von den Ebenen der Flächen $AA_2 A_3$ und $BB_2 B_3$, $AA_2 A_3$ und $BB_3 B_1$, .. gebildeten Flächenwinkel bedeuten.

Wenn das zweite Tetraeder mit dem ersten zusammenfällt, und wenn die Flächen $AA_2 A_3$, $AA_3 A_1$, $AA_1 A_2$ die Werthe f_1, f_2, f_3 haben, so findet man

$$6 AA_1 A_2 A_3 l^2 = l^3 / l_1^2 l_2^2 l_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos_{12} & \cos_{13} \\ \cos_{21} & 1 & \cos_{23} \\ \cos_{31} & \cos_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

oder nach §. 15, 3

$$6 AA_1 A_2 A_3 l^2 = 8 f_1 f_2 f_3 \sin_{123}^*$$

wo \sin_{123} den Sinus der Ecke bedeutet, deren Kanten die 'positiven' Normalen der Ebenen AA_1A_2 , AA_1A_3 , AA_2A_3 sind, und welche der von den Geraden AA_1 , AA_2 , AA_3 gebildeten Ecke des Tetraeders so zugeordnet ist, dass die Kugelschnitte der beiden Ecken Polarfiguren sind.

16. Bezeichnet man beim Zusammenfallen der Tetraeder $AA_1A_2A_3$ und $BB_1B_2B_3$ die Werthe $c_{11}, \dots, \gamma_{11}, \dots$ durch $a_{11}, \dots, \alpha_{11}, \dots$, und das 6fache Volum des Tetraeders durch v , so ist $a_{21} = a_{12}$, $\alpha_{21} = \alpha_{12}$, u. s. w. und 15

$$v^2 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}, \quad v^3 = \Sigma \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \alpha_{33},$$

$$a_{11} = 4 AA_2 A_3 l^2, \quad \alpha_{12} = 4 AA_2 A_3 \cdot AA_3 A_1 \cos_{12}, \quad \text{u. s. w.}$$

Dabei hat man für die vierte Tetraederfläche (**)

$$4 A_3 A_2 A_1 l^2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2 a_{23} + 2 a_{31} + 2 a_{12} = 4 f^2$$

so wie für die Diagonale AA' des Parallelepipedes, von welchem A ein Eckpunkt und $A_1A_2A_3$ ein Diagonaldreieck ist,

$$AA'^2 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2 a_{23} + 2 a_{31} + 2 a_{12}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke hat LAGRANGE (sur les pyr. 17) die Tetraeder von grösstem oder kleinsten Volum bestimmt, deren Flächen gegebene Inhalte haben. Dann sind α_{11} , α_{22} , α_{33} und

$$2 a_{23} + 2 a_{31} + 2 a_{12} = 4 f^2 - \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33} = - 2 s$$

von gegebener Grösse, und $v^3 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ kann einen grössten oder kleinsten Werth annehmen, wenn der Coefficient μ den Bedingungen

*. Diese Gleichung ist von LAGRANGE's Gleichung (sur les pyr. 17) nicht wesentlich verschieden. Vergl. BRETSCHNEIDER Geometrie 677 und des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 16.

**) LAGRANGE sur les pyr. 12. Vergl. des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 6, 5.

$$\frac{\partial r^4}{\partial a_{12}} + \mu \frac{\partial s}{\partial a_{23}} = 0, \quad \frac{\partial r^4}{\partial a_{31}} + \mu \frac{\partial s}{\partial a_{31}} = 0, \quad \frac{\partial r^4}{\partial a_{12}} + \mu \frac{\partial s}{\partial a_{12}} = 0$$

genügt. Nun ist $\frac{\partial s}{\partial a_{23}} = -1$, und $\frac{1}{2} \frac{\partial r^4}{\partial a_{23}}$ hat als Coefficient von a_{23} in $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33}$ den Werth $r^2 a_{23}$ (§. 6, 2, u. s. w.). Also gelten für ein Tetraeder von der geforderten Eigenschaft die Bedingungen

$$a_{23} = a_{31} = a_{12}.$$

Bezeichnet man die Geraden AA_1, AA_2, AA_3, A_2A_3 durch r_1, r_2, r_3, ϱ_1 , so hat man allgemein (§. 16, 3)

$$AA_1 \cdot A_2A_3 \cos r_1 \varrho_1 + AA_1 \cdot A_3A_2 \cos r_1 r_3 + AA_1 \cdot AA_2 \cos r_1 r_2 = 0.$$

In dem vorliegenden Falle sind die beiden letzten Glieder dieser Gleichung entgegengesetzt gleich, daher bleibt

$$AA \cdot A_2A_3 \cos r_1 \varrho_1 = 0,$$

d. h. das gesuchte Tetraeder gehört zu den besondern Tetraedern, deren gegenüberliegende Kanten normal zu einander sind, und deren Höhen sich in einem Punkt schneiden*).

Um die Elemente des gesuchten Tetraeders zu berechnen, hat man eine Gleichung 4ten Grades aufzulösen. Bezeichnet man nämlich die gleichen Kantenproducte a_{23}, a_{31}, a_{12} durch $\sqrt[3]{\vartheta}$, so hat man

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} a_{33} - \vartheta & a_{23} &= \vartheta - a_{11} \sqrt[3]{\vartheta} \\ a_{22} &= a_{33} a_{11} - \vartheta & a_{31} &= \vartheta - a_{22} \sqrt[3]{\vartheta} \\ a_{33} &= a_{11} a_{22} - \vartheta & a_{12} &= \vartheta - a_{33} \sqrt[3]{\vartheta} \end{aligned}$$

folglich

$$(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \sqrt[3]{\vartheta} = 3\vartheta + s, \quad a_{11}^2 = \frac{\vartheta + a_{22}(\vartheta + a_{33})}{\vartheta + a_{11}}, \quad \text{u. s. w.}$$

$$\left\{ \frac{\vartheta + a_{22}(\vartheta + a_{33})}{\vartheta + a_{11}} + \frac{\vartheta + a_{33}(\vartheta + a_{11})}{\vartheta + a_{22}} + \frac{(\vartheta + a_{11})(\vartheta + a_{22})}{\vartheta + a_{33}} \right\} \vartheta = 3\vartheta^2 + 2\vartheta s - 4f^2 + s^2,$$

$$\begin{aligned} &\vartheta \vartheta + a_{22}^2 \vartheta + a_{33}^2 \vartheta + \vartheta \vartheta + a_{33}^2 \vartheta + a_{11}^2 + \vartheta(\vartheta + a_{11})^2 \vartheta + a_{22}^2 \\ &= [3\vartheta^2 + 2\vartheta s - 4f^2 + s^2] \vartheta + a_{11} \vartheta + a_{22}(\vartheta + a_{33}). \end{aligned}$$

* Diese Bemerkung ist von PAINVIN Compt. rend. t. 54 p. 379 und Nouv. Ann. 1862 p. 267 gemacht worden. Ueber die von FERRIOT und FEUERBACH betrachteten Tetraeder der angegebenen Art vergl. des Verf. Elem. d. Math. 5tes Buch §. 6, 10.

Diese Gleichung für ϑ ist 4ten Grades und hat eine positive reale Wurzel, weil der Coefficient von ϑ^4 auf der linken Seite und das bekannte Glied auf der rechten Seite beide positiv sind. Dass die Gleichung nicht mehr als eine positive reale Wurzel besitzt, und dass zu jener Wurzel ein reales Tetraeder gehört, dessen Volum ein Maximum ist, findet man in der angeführten Abhandlung PAINVIN's bewiesen.

17. Wenn die orthogonalen Coordinaten der Punkte M , N , A_i , B_k durch

$$a, b, c; \quad \alpha, \beta, \gamma; \quad x_i, y_i, z_i; \quad \xi_k, \eta_k, \zeta_k$$

und die Geraden NA_i , MB_k durch r , ϱ bezeichnet werden, so hat man

$$NA_i \cos r \varrho = x_i - \alpha \cos x \varrho + y_i - \beta \cos y \varrho + z_i - \gamma \cos z \varrho,$$

$$NA_i \cdot MB_k \cos r \varrho = (x_i - \alpha)(\xi_k - a) + (y_i - \beta)(\eta_k - b) + (z_i - \gamma)(\zeta_k - c).$$

Zugleich ist (12)

$$2NA_i \cdot MB_k \cos r \varrho = MA_i^2 + NB_k^2 - MN^2 - A_i B_k^2.$$

Setzt man nun voraus, dass M und N die Centren der Kugeln $A_1 A_2 A_3 A_4$ und $B_1 B_2 B_3 B_4$ sind, so ist

$$MA_i^2 + NB_k^2 - MN^2 = p$$

von unveränderlicher Grösse. Wenn insbesondere die Kugeln sich schneiden und O ein gemeinschaftlicher Punkt derselben ist, so hat man

$$p = MO^2 + NO^2 - MN^2 = 2MO \cdot NO \cos \varphi,$$

wo φ den Winkel der Geraden MO und NO d. i. den Winkel der beiden Kugeln bedeutet. Demnach ergibt sich, indem man wie oben (13) $A_i B_k^2$ durch d_{ik} bezeichnet,

$$-\frac{1}{2}d_{ik} = -\frac{1}{2}p + (x_i - \alpha)(\xi_k - a) + (y_i - \beta)(\eta_k - b) + (z_i - \gamma)(\zeta_k - c).$$

Hieraus folgt nach der Multiplicationsregel (§. 5, 1)

$$\pm d_{11} \dots d_{44} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}p & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & z_1 - \gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{2}p & x_4 - \alpha & y_4 - \beta & z_4 - \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 - a & \eta_1 - b & \zeta_1 - c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_4 - a & \eta_4 - b & \zeta_4 - c \end{vmatrix}.$$

Indem man den Factor $\frac{1}{2}p$ absondert und zur 2ten, 3ten, 4ten Colonne in beiden Systemen die multiplicirte 1te Colonne addirt, findet man nach §. 15. 6

$$288 p \cdot A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 B_4 = - \Sigma \pm d_{11} \dots d_{44}^{(1)},$$

eine Gleichung, die beim Zusammenfallen der beiden Tetraeder auf die oben (11) entwickelte sich reducirt.

Man erkennt hieraus, dass die Determinante $\Sigma \pm d_{11} \dots d_{44}$, deren Elemente die Quadrate der Strecken sind, welche 4 Punkte mit 4 andern Punkten verbinden, dem Product der beiden Tetraedervolumen proportional ist, und übrigens nur von der Grösse und dem Abstand der umgeschriebenen Kugeln abhängt. Sie verschwindet, wenn die beiden Kugeln sich rechtwinkelig schneiden, und insbesondere auch dann, wenn die 4 Punkte des einen Systems auf einem Kreise liegen.

Mit Hülfe von (14) ergibt sich noch

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & . \\ 1 & d_{11} & d_{21} & . \\ 1 & d_{12} & d_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 1 & 1 & . \\ 0 & d_{11} & d_{21} & . \\ 0 & d_{12} & d_{22} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p} & 1 & . & . & 1 \\ 1 & d_{11} & . & . & d_{41} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & d_{14} & . & . & d_{44} \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, welche ausser den Quadraten der Strecken nur die Grösse p enthält.

18. Aus den gefundenen Gleichungen (17) hat SIEBECK a. a. O. analoge goniometrische Gleichungen abgeleitet. Man vereinige die Punkte A_4 und B_4 im Centrum O einer Kugel, deren Radius die Längeneinheit ist, und auf welcher die sphärischen Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ liegen. Dann ist $d_{44} = 0$,

$$d_{11} = d_{21} = d_{31} = d_{41} = d_{12} = d_{13} = 1,$$

$$d_{ik} = 4 \sin^2 \frac{1}{2} A_i B_k = 2 - 2 \cos A_i B_k,$$

$$36 A_1 A_2 A_3 A_4 \cdot B_1 B_2 B_3 B_4 = \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3,$$

$$-16 p \sin A_1 A_2 A_3 \cdot \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 - 2 \cos A_1 B_1 & 2 - 2 \cos A_2 B_1 & \\ 2 & 2 - 2 \cos A_1 B_2 & 2 - 2 \cos A_2 B_2 & \\ . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

$$-2 p \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}.$$

Nach [6] hat man aber auch

$$\sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 0 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 0 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix},$$

folglich

$$1 - 2 p \sin A_1 A_2 A_3 \sin B_1 B_2 B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix},$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos A_1 B_1 & \cos A_2 B_1 & \cos A_3 B_1 \\ 1 & \cos A_1 B_2 & \cos A_2 B_2 & \cos A_3 B_2 \\ 1 & \cos A_1 B_3 & \cos A_2 B_3 & \cos A_3 B_3 \end{vmatrix}.$$

Um die Grösse p sphärisch auszudrücken, braucht man die sphärischen Centren P und Q der Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ auf der mit der Längeneinheit um den Punkt O beschriebenen Kugel. Die Geraden OP und OQ sind Diameter der Kugeln $A_1 A_2 A_3 O$ und $B_1 B_2 B_3 O$, also ist $\cos PQ$ der Cosinus des von den Geraden OM und ON gebildeten Winkels, mithin

$$p = 2 OM \cdot ON \cos PQ, \quad 2p = OP \cdot OQ \cos PQ.$$

Nun ist $OP \cos PA_1 = OA_1 = 1$, $OQ \cos QB_1 = OB_1 = 1$, folglich

$$2p = \frac{\cos PQ}{\cos PA_1 \cos QB_1}.$$

Wenn die Kreise $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ in R sich schneiden, so hat man

$$\cos PQ = \cos PR \cos RQ + \sin PR \sin RQ \cos QRP,$$

$$2p = 1 + \tan PR \tan RQ \cos QRP.$$

Bei rechtwinkelig sich schneidenden Kreisen ist $2p = 1$.

§. 17. Polygonometrische und polyedrometrische Relationen.

1. Wenn die Seiten AB, BC, \dots, MN, NA eines beliebigen Polygons nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtungen der Geraden, auf denen sie liegen, die Werthe a_1, a_2, \dots, a_n haben, und $\cos p_i$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade der i ten Seite mit einer beliebigen Geraden bildet, so ist *

$$a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots + a_n \cos p_n = 0.$$

Sind nämlich A_1, B_1, \dots die orthogonalen Projectionen von A, B, \dots auf eine beliebige Gerade, so hat man

$$A_1 B_1 + B_1 C_1 + \dots + M_1 N_1 + N_1 A_1 = 0$$

unter der Voraussetzung, dass $A_1 B_1 = -B_1 A_1$, u. s. w. Nun ist allgemein $A_1 B_1 = AB \cos p_1$, wie auch die Richtung der positiven Strecken auf den Geraden, deren Strecken AB und $A_1 B_1$ sind, angenommen werde, weil bei Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten zwei der Grössen $A_1 B_1, AB, \cos p_1$ das Zeichen wechseln. Durch Substitution der Werthe von $A_1 B_1, B_1 C_1, \dots$ findet man die angegebene Fundamentalgleichung der Polygonometrie.

Wenn umgekehrt a_1, a_2, \dots, a_n Strecken von gegebener Richtung und Grösse sind, und $\cos p_i$ den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die Gerade, auf welcher die i te Strecke liegt, mit einer beliebigen Geraden bildet, und die Summe

$$S = a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots + a_n \cos p_n$$

verschwindet, wie auch die willkürliche Gerade angenommen werde, so erhält man ein geschlossenes Polygon, wenn man nach willkürlicher Anordnung der Strecken, ohne deren Richtungen zu verändern, mit dem Ende der ersten den Anfang

* LEXELL Nov. Comm. Petrop. 19 p. 487. L'HUIER polygonometrie p. 20. CARNOT geom. de pos. 254.

der zweiten, mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Gesetzt, das Ende der letzten Strecke fiel mit dem Anfang der ersten nicht zusammen, so würde die Summe S im Allgemeinen nicht verschwinden, was der Voraussetzung widerstreitet.

2. Der Inhalt eines planen Dreiecks ist unzweideutig bestimmt, wenn nicht nur der Sinn, in welchem sein Perimeter zu durchlaufen ist, sondern auch die positive Richtung der Normalen seiner Ebene nebst dem positiven Sinn der Ebene gegeben ist. Der Beurtheiler stelle sich so auf die Ebene, dass ihm die positive Richtung der Normalen aufwärts gehend erscheint; je nachdem nun die durch die Ordnung der Eckpunkte gegebene Drehung mit der Drehung, durch welche positive Winkel und Flächen beschrieben werden, einerlei Sinnes ist oder nicht, wird der Inhalt als positiv oder negativ bezeichnet. In gleicher Weise ist zur unzweideutigen Bestimmung des Inhalts jedes planen Polygons der Sinn seines Perimeters erforderlich.

Bei einer Fläche eines gegebenen Polyeders kann der Sinn ihres Perimeters willkürlich bestimmt werden. Bei jeder mit dieser Fläche durch eine gemeinschaftliche Kante MN verbundenen Fläche des Polyeders wird der Sinn des Perimeters so angenommen, dass die vereinigten Theile der beiden Perimeter einander entgegengesetzt sind, also der eine durch MN , der andre durch NM ausgedrückt wird^{*)}. Wenn z. B. eine Fläche des Tetraeders $ABCD$ durch ABC ausgedrückt wird, so sind die übrigen Flächen durch CBD , BAD , ACD auszudrücken. Ist $ABCD$ eine Fläche eines Hexaeders, so sind $DCC'D'$, $CBB'C'$, $BAA'B'$, $ADD'A'$, $D'C'B'A'$ die übrigen Flächen. U. s. f.

Wenn nun die in der angegebenen Weise ausgedrückten Flächen eines Polyeders nach willkürlicher Festsetzung der positiven Richtung der Normalen und des positiven Sinnes einer jeden Ebene die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ haben, und wenn durch $\cos p_i$ der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, welchen die

^{*)} Dieses Princip ist von Möbius Statik §. 55 angedeutet worden.

Ebene der i ten Fläche mit einer beliebig hinzugefügten Ebene bildet, so ist *)

$$a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots + a_n \cos p_n = 0.$$

Beweis. Man bezeichne die Normalprojectionen der Eckpunkte A, B, C, \dots auf die beliebig angenommene Ebene durch A_1, B_1, C_1, \dots . Die Summe Σ der Projectionen der Polyederflächen besteht aus der Summe aller Dreiecke, welche einen beliebigen Punkt O der Projectionsebene zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Basen die Seiten der durch Projection der Polyederflächen entstandenen Polygone sind. Die Summe dieser Dreiecke enthält aber zu jedem Dreieck OM_1N_1 auch das entgegengesetzte ON_1M_1 , folglich verschwindet sie und mit ihr die Summe Σ . Nun ist die Projection der i ten Fläche

$$F_1 G_1 H_1 \dots = FGH \dots \cos p_i,$$

also verschwindet die Summe $a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots$.

Zusatz. Construirt man auf den Normalen der Flächen des Polyeders je eine Strecke a_1, a_2, \dots, a_n proportional den Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ der Flächen, zu denen die Normalen gehören, so ist zufolge der bewiesenen Gleichung auch

$$a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots + a_n \cos p_n = 0,$$

wo nun unter $\cos p_i$ der Cosinus des Winkels verstanden werden kann, den die Gerade, auf der die Strecke a_i liegt, mit der Normale einer beliebigen Ebene d. h. mit einer beliebigen Geraden bildet. Daher erhält man ⁽¹⁾ ein geschlossenes Polygon, wenn man, ohne die Richtung der Strecken a_1, a_2, \dots, a_n zu verändern, mit dem Ende der ersten Strecke den Anfang der zweiten, dann mit dem Ende der zweiten den Anfang der dritten u. s. f. vereint. Es giebt also für jedes Polyeder ein zugehöriges Polygon, dessen Seiten und Winkel den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders gleich sind, so dass jeder polygonometrischen Gleichung zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons eine polyedrometrische Gleichung zwi-

* L'HUIER théorèmes de polyedr. 4799 (Mém. présentés à l'Inst. 4. 4805 p. 264). CARNOT l. c. Die Voraussetzungen, unter welchen die Gleichung gültig ist, werden in den angeführten Schriften nicht genau angegeben.

schen den Flächen und Flächenwinkeln des Polyeders entspricht.

3. Indem man die beliebige Gerade (Ebene) der Reihe nach mit den Geraden (Ebenen) der verschiedenen Polygonseiten (Polyederflächen) vereinigt, erhält man das System von linearen Gleichungen (I)

$$\begin{aligned} a_1 \cos_{11} + a_2 \cos_{12} + \dots + a_n \cos_{1n} &= 0 \\ \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1 \cos_{m1} + a_2 \cos_{m2} + \dots + a_n \cos_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

worin $\cos_{ii} = 1$, $\cos_{ki} = \cos_{ik}$ ist. Zuzufolge dieses Systems hat man (§. 8)

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \cdot & \cdot & \cos_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos_{m1} & \cdot & \cdot & \cos_{mn} \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung zwischen den Cosinus der Winkel von n Geraden (Ebenen), die mit den Seiten [Flächen] eines Polygons [Polyeders] parallel sind,

Da 3 Gerade x, y, r , welche mit einer Ebene parallel sind, auch mit den Seiten eines Dreiecks parallel sind, so hat man, wie bekannt,

$$(I) \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos x r & \cos y r \\ \cos x r & 1 & \cos x y \\ \cos y r & \cos x y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn 4 beliebige Gerade (Ebenen) x, y, z, r gegeben sind, so lässt sich ein Viereck (Tetraeder) construiren, dessen Seiten (Flächen) mit den gegebenen Geraden (Ebenen) parallel sind. Folglich ist

$$\text{II.} \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos xr & \cos yr & \cos zr \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung, welche man nach §. 3. 17 entwickeln kann, enthält den Zusammenhang zwischen den Cosinus der von 4 Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln, zwischen den Seiten

und Diagonalen eines sphärischen Vierecks, zwischen den Flächenwinkeln eines Tetraeders^{*)}.

Wenn insbesondere x, y, z, r die Richtungen der Kanten AB, AC, AD und des Radius AE der dem Tetraeder $ABCD$ umgeschriebenen Kugel bedeuten, wenn $AB = b, AC = c, AD = d, AE = e$, so hat man

$$4 : \cos xr : \cos yr : \cos zr = 2e : b : c : d,$$

folglich (§. 3, 4)

$$\text{III} \quad \begin{vmatrix} 4e^2 & b & c & d \\ b & 4 & \cos xy & \cos xz \\ c & \cos xy & 4 & \cos yz \\ d & \cos xz & \cos yz & 4 \end{vmatrix} = 0$$

zur Berechnung des Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel aus den Elementen einer Ecke^{**)}.

Wenn E irgend einen fünften Punkt des Raumes bedeutet, so hat man bei den vorigen Bezeichnungen

$$\text{IV} \quad \begin{vmatrix} e^2 & be \cos xr & ce \cos yr & de \cos zr \\ be \cos xr & b^2 & bc \cos xy & bd \cos xz \\ ce \cos yr & bc \cos xy & c^2 & cd \cos yz \\ de \cos zr & bd \cos xz & cd \cos yz & d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Drückt man das Streckenproduct $be \cos xr$ durch die Quadrate der Seiten des Dreiecks ABE aus u. s. w., so erhält man die Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden. Diese Gleichung ist für das Quadrat einer Strecke vom zweiten Grade, in Uebereinstimmung mit der Construction, durch welche die Strecke aus den übrigen Strecken gefunden wird^{***)}.

* CARNOT géom. de pos. 350.

***) LEGENDRE élém. de géom. Note V. Diese Gleichung ist nicht wesentlich verschieden von LAGRANGE'S Gleichung (sur les pyr. 21).

****) CARNOT géom. de pos. 359. Mém. sur la relation qui existe etc. 58. Diese Gleichung ist von LAGRANGE'S Gleichung (sur les pyr. 49) nur äusserlich verschieden. Vergl. unten 12.

4. Aus dem System der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a_1 \cos p_1 + a_2 \cos p_2 + \dots + a_n \cos p_n &= 0 \\
 a_1 \cos z_1 + a_2 \cos z_2 + \dots + a_n \cos z_n &= 0 \\
 &\vdots \\
 a_1 \cos n_1 + a_2 \cos n_2 + \dots + a_n \cos n_n &= 0
 \end{aligned}$$

folgt die allgemeinere Gleichung

$$\begin{vmatrix} \cos p_1 & \cos p_2 & \dots & \cos p_n \\ \cos z_1 & \cos z_2 & \dots & \cos z_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos n_1 & \cos n_2 & \dots & \cos n_n \end{vmatrix} = 0,$$

welche den Zusammenhang zwischen den von $n+1$ Geraden (Ebenen) gebildeten Winkeln ausdrückt, wenn n Gerade (Ebenen) mit den Seiten (Flächen) eines Polygons (Polyeders) von n Seiten (Flächen) parallel sind.

In der analytischen Theorie der Geraden werden hauptsächlich die besondern Fälle

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys \\ \cos xr & 1 & \cos xy \\ \cos yr & \cos xy & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \cos rs & \cos xs & \cos ys & \cos zs \\ \cos xr & 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos yr & \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos zr & \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} = 0$$

zur Bestimmung des Winkels von zwei Geraden aus den Winkeln, welche dieselben mit den coordinirten Axen bilden, angewendet*).

5. Aus dem in (3) benutzten System von linearen Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der Seiten eines Polygons (oder der Flächen eines Polyeders) ableiten. Nach §. 8 mit Rücksicht auf §. 6, 3 findet man

$$\begin{aligned}
 a_1 : a_2 : a_3 : \dots &= \rho_{i1} : \rho_{i2} : \rho_{i3} : \dots \\
 a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 : \dots &= \rho_{11}^2 : \rho_{22}^2 : \rho_{33}^2 : \dots
 \end{aligned}$$

*) MAGNUS anal. Geom. des Raumes §. 9 (7). Vergl. einen Aufsatz des Verf. in Crelle J. 46 p. 445.

wenn β_{ik} den Coefficienten von $\cos ik$ in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos_{11} & \dots & \cos_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos_{n1} & \dots & \cos_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Bezeichnet man wie §. 43, 3 die Determinante $\Sigma \pm \cos_{11} \dots \cos_{nn}$ durch $\sin^2_{1,2,\dots,n}$, so ist

$$\beta_{ii} = \sin^2_{1,\dots,i-1,i+1,\dots,n}.$$

Für $n = 3$ reducirt sich β_{11} auf \sin^2_{23} , β_{22} auf \sin^2_{13} , β_{33} auf \sin^2_{12} in Uebereinstimmung mit dem bekannten Satz von den Verhältnissen der Seiten eines Dreiecks.

Wenn das Polygon plan ist und $n > 3$, so verschwinden $\beta_{11}, \beta_{22}, \dots, \beta_{nn-3}$, weil $n-1$ Gerade einer Ebene ein $(n-1)$ Eck bilden. Die Verhältnisse der Seiten eines planen Polygons sind daher im Allgemeinen unbestimmte Functionen der von den Seiten gebildeten Winkel.

Wenn das Polygon nicht plan ist und $n = 4$, so ist

$$\beta_{11} = \sin^2_{234}, \quad \beta_{22} = \sin^2_{134}, \quad \beta_{33} = \sin^2_{124}, \quad \beta_{44} = \sin^2_{123}.$$

Dem absoluten Werthe nach ist also

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \sin_{234} : \sin_{134} : \sin_{124} : \sin_{123}.$$

Der gleichlautende tetraedrometrische Satz von den Verhältnissen der Flächen eines Tetraeders ist bekannt*). Wenn $n > 4$, so kann in besondern Fällen die Proportion der Polygonseiten Polyederflächen unbestimmt werden.

Vermöge der gefundenen Proportion hat man (1)

$$\beta_{ii} \cos p_i + \beta_{i2} \cos p_2 + \dots + \beta_{in} \cos p_n = 0,$$

eine Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie, worin eine beliebige Numer für i und $\sqrt{\beta_{ii}}\sqrt{\beta_{ik}}$ für β_{ik} gesetzt werden kann. In dem einfachsten Falle ergibt sich

$$\sin_{12} \cos p_1 + \sin_{31} \cos p_2 + \sin_{12} \cos p_3 = 0,$$

die bekannte Gleichung der planen Goniometrie.

6. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Abstände AP, BP, CP zweideutig be-

* BREITSCHNEIDER, Geom., 677.

stimmt, denn der mit P symmetrisch zu der Ebene ABC liegende Punkt P' hat von A, B, C dieselben Abstände. Bezeichnet man einerseits AP^2, BP^2, CP^2 durch g_1, g_2, g_3 , die Producte

$$OA \cdot OP \cos AOP, \quad OB \cdot OP \cos BOP, \quad OC \cdot OP \cos COP$$

durch h_1, h_2, h_3 , und $OP^2, OA^2, \dots, OA \cdot OB \cos AOB, \dots$ durch $h, a_{11}, \dots, a_{12}, \dots$ andererseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen durch $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x, y, z$: so findet man zwischen beiderlei Bestimmungen von P folgende Relationen^{*)}.

Zunächst ergeben sich die trigonometrischen Gleichungen

$$2h_1 = a_{11} + h - g_1, \quad 2h_2 = a_{22} + h - g_2, \quad 2h_3 = a_{33} + h - g_3,$$

mit welchen man die quadratische Gleichung [3, IV] für h

$$\begin{vmatrix} h & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

zu verbinden hat, um die Coordinaten h_1, h_2, h_3 aus den Coordinaten g_1, g_2, g_3 zu berechnen.

Ferner ergibt sich durch Projection (vergl. §. 13, 4)

$$\begin{aligned} h_1 &= xX_1 + yY_1 + zZ_1 \\ h_2 &= xX_2 + yY_2 + zZ_2 \\ h_3 &= xX_3 + yY_3 + zZ_3, \end{aligned}$$

wenn man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} x_1 &+ y_1 \cos xy + z_1 \cos xz = X_1 \\ x_1 \cos xy + y_1 &+ z_1 \cos yz = Y_1 \\ x_1 \cos xz + y_1 \cos yz + z_1 &= Z_1 \end{aligned}$$

u. s. w. setzt. Umgekehrt hat man (§. 8, 1)

$$\begin{aligned} Rx &= h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3 \\ Ry &= h_1 Y_1 + h_2 Y_2 + h_3 Y_3 \\ Rz &= h_1 Z_1 + h_2 Z_2 + h_3 Z_3, \end{aligned}$$

^{*)} LAGRANGE sur les pyr. 48.

indem man durch R die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos xy & \cos xz \\ \cos xy & 1 & \cos yz \\ \cos xz & \cos yz & 1 \end{vmatrix} \\ = 6 OABC \sin xyz$$

und durch X_1, \dots den Coefficienten von X_1, \dots in R bezeichnet, der sich nach §. 5, 6 weiter entwickeln lässt.

Wenn insbesondere P das Centrum der dem Tetraeder $OABC$ umgeschriebenen Kugel ist, so hat man $g_1 = g_2 = g_3 = h$, folglich $h_1 = \frac{1}{2} a_{11}$, $h_2 = \frac{1}{2} a_{22}$, $h_3 = \frac{1}{2} a_{33}$ u. s. w.

Anstatt der Coordinaten g_1, g_2, g_3 können die Verhältnisse dieser Grössen zu h gebraucht werden. Dann sind P und P' die gemeinschaftlichen Punkte der Kugeln, welche die Strecken AO, BO, CO normal und harmonisch nach den Verhältnissen $\sqrt{g_1} : h, \sqrt{g_2} : h, \sqrt{g_3} : h$ schneiden *).

7. Die Lage des Punktes P in Bezug auf das Tetraeder $OABC$ ist durch die Abstände desselben von drei Flächen des Tetraeders eindeutig bestimmt, wenn die positiven Richtungen der Normalen und die positiven Sinne der Ebenen gegeben sind. Bezeichnet man einerseits die Werthe der Flächen OBC, OCA, OAB, CBA durch f_1, f_2, f_3, f ; die Werthe der Abstände des Punktes P von den genannten Flächen durch p_1, p_2, p_3, p ; andererseits die Coordinaten der Punkte A, B, C, P in Bezug auf drei durch O gelegte Axen wie vorhin, so hat man zwischen diesen Bestimmungen von P folgende Relationen **).

In §. 13, 7 wurde gesetzt

$$OABC : OBCP : OCAP : OABP : CBAP = 1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu, \\ 6 OABC = V \sin xyz,$$

daher ist

$$1 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 : \mu = V \sin xyz : 2f_1 p_1 : 2f_2 p_2 : 2f_3 p_3 : 2fp, \\ \mu_1 V = \frac{2f_1 p_1}{\sin xyz} \text{ u. s. w.}$$

* Vergl. des Verf. Elem. d. Math. 6tes Buch §. 7, 44. SIEBECK Crelle J. 62 p. 155.

**) LAGRANGE l. c. 24.

Durch diese Substitution erhält man für p_1, p_2, p_3

$$\frac{2f_1 p_1}{\sin x y z} = \xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z$$

$$\frac{2f_2 p_2}{\sin x y z} = \xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z$$

$$\frac{2f_3 p_3}{\sin x y z} = \xi_3 x + \eta_3 y + \zeta_3 z$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{2} x V \sin x y z = f_1 p_1 x_1 + f_2 p_2 x_2 + f_3 p_3 x_3$$

$$\frac{1}{2} y V \sin x y z = f_1 p_1 y_1 + f_2 p_2 y_2 + f_3 p_3 y_3$$

$$\frac{1}{2} z V \sin x y z = f_1 p_1 z_1 + f_2 p_2 z_2 + f_3 p_3 z_3.$$

Vermöge der Gleichung $\mu + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ ist

$$f p + f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3 = \frac{1}{2} V \sin x y z,$$

wodurch p von p_1, p_2, p_3 abhängig gemacht wird.

Wenn insbesondere P das Centrum einer die Tetraederflächen berührenden Kugel ist, so sind die absoluten Werthe von p, p_1, p_2, p_3 einander gleich. Haben bei einem innern Punkt des Tetraeders p, p_1, p_2, p_3 einerlei Zeichen und den gemeinschaftlichen Werth ϱ , so findet man für die eingeschriebene Kugel im engeren Sinne

$$f + f_1 + f_2 + f_3 \varrho = \frac{1}{2} V \sin x y z$$

$$f + f_1 + f_2 + f_3 x = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3$$

$$f + f_1 + f_2 + f_3 y = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3$$

$$f + f_1 + f_2 + f_3 z = f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3.$$

Durch die möglichen Zeichenwechsel von p_1, p_2, p_3 findet man 8 Radien und 8 dazu gehörige Centren, welche im Allgemeinen endliche Grössen und Entfernungen haben, für ebensoviel die Ebenen der Tetraederflächen berührende Kugeln.

8. Die Relationen, welche zwischen den Coordinaten g_1, g_2, g_3 oder h_1, h_2, h_3 (6) des Punktes P und den Coordinaten μ_1, μ_2, μ_3 oder p_1, p_2, p_3 (7) desselben stattfinden*), ergeben sich, wenn man die §. 13, 7 für x, y, z gefundenen Werthe in den für h_1, h_2, h_3 erhaltenen Formeln substituirt. In der Formel

*) LAGRANGE I. c. 26.

$$h_1 = \mu_1 (x_1 X_1 + y_1 Y_1 + z_1 Z_1) + \mu_2 (x_2 X_1 + y_2 Y_1 + z_2 Z_1) \\ + \mu_3 (x_3 X_1 + y_3 Y_1 + z_3 Z_1)$$

hat der Coefficient von μ_1 den Werth $OA^2 = a_{11}$, der Coefficient von μ_2 den Werth $OA \cdot OB \cos AOB = a_{12}$ u. s. w. (vergl. den Beweis §. 15, 4). Man erhält demnach

$$h_1 = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13} \\ h_2 = \mu_1 a_{12} + \mu_2 a_{22} + \mu_3 a_{23} \\ h_3 = \mu_1 a_{13} + \mu_2 a_{23} + \mu_3 a_{33}.$$

Anstatt die Determinante zu entwickeln, welche man $= 0$ setzen muss, um h zu bestimmen (6), kann man unmittelbar wie vorhin

$$h = xX + yY + zZ$$

setzen und erhält

$$h = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \mu_3 h_3 \\ = \mu_1^2 a_{11} + \mu_2^2 a_{22} + \mu_3^2 a_{33} + 2\mu_1 \mu_2 a_{12} + 2\mu_1 \mu_3 a_{13} + 2\mu_2 \mu_3 a_{23}.$$

Umgekehrt hat man (§. 16, 7, §. 8, 4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = V^2 \sin^2 xyz,$$

$$\mu_1 V^2 \sin^2 xyz = h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13} \\ \mu_2 V^2 \sin^2 xyz = h_1 a_{12} + h_2 a_{22} + h_3 a_{23} \\ \mu_3 V^2 \sin^2 xyz = h_1 a_{13} + h_2 a_{23} + h_3 a_{33},$$

wenn a_{11}, a_{12}, \dots die Coefficienten von a_{11}, a_{12}, \dots in der für $V^2 \sin^2 xyz$ angegebenen Determinante sind.

Aus diesen Relationen ergeben sich die übrigen durch die Substitutionen

$$\mu_1 V \sin xyz = 2f_1 p_1 \quad \text{u. s. f. (§. 7)}$$

$$a_{11} = 4f_1^2, \quad a_{12} = 4f_1 f_2 \cos i_{12} \quad \text{u. s. f. (§. 16, 3, §. 16, 16)}$$

nämlich

$$\frac{1}{2} h_1 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{11} + f_2 p_2 a_{12} + f_3 p_3 a_{13} \\ \frac{1}{2} h_2 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{12} + f_2 p_2 a_{22} + f_3 p_3 a_{23} \\ \frac{1}{2} h_3 V \sin xyz = f_1 p_1 a_{13} + f_2 p_2 a_{23} + f_3 p_3 a_{33} \\ \frac{1}{4} h V^2 \sin^2 xyz = f_1^2 p_1^2 a_{11} + f_2^2 p_2^2 a_{22} + f_3^2 p_3^2 a_{33} \\ + 2f_1 f_2 p_1 p_2 a_{12} + 2f_1 f_3 p_1 p_3 a_{13} + 2f_2 f_3 p_2 p_3 a_{23},$$

und umgekehrt

$$\frac{1}{2} p_1 V \sin xyz = h_1 f_1 + h_2 f_2 \cos_{12} + h_3 f_3 \cos_{13}$$

$$\frac{1}{2} p_2 V \sin xyz = h_1 f_1 \cos_{12} + h_2 f_2 + h_3 f_3 \cos_{23}$$

$$\frac{1}{2} p_3 V \sin xyz = h_1 f_1 \cos_{13} + h_2 f_2 \cos_{23} + h_3 f_3 .$$

9. Die Beziehung zwischen 4 Punkten eines Kreises A, B, C, D kann durch die Eigenschaften der Winkel, Strecken, Flächen, welche durch die betrachteten Punkte bestimmt sind, angegeben werden. Nach dem bekannten in EUCLIDES' Elementen enthaltenen Theorem ist die Winkeldifferenz $ACB - ADB$ entweder 0 oder 180° , mithin allgemein

$$1 \quad 2 \quad ACB - ADB = 0 \quad ,$$

wenn die genannten Punkte auf einem Kreise liegen und Winkel von gleichen Zeichen durch Drehungen von einerlei Sinn beschrieben werden. Der Winkel 360° ist gleichbedeutend mit 0.

Nach dem Theorem des PROLEMÄUS [Almagest I, 9] ist ferner

$$II \quad p^2 + q^2 + r^2 = 0 \quad ,$$

wenn die Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Strecken, welche 4 Kreispunkte A, B, C, D verbinden, durch p, q, r bezeichnet werden. Man findet aus dieser Gleichung die rationale Gleichung zwischen den Quadraten der Strecken, welche durch die genannten Punkte bestimmt sind. Eine der letztern analoge Gleichung lässt sich für die Quadrate der Strecken aufstellen, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden.

Endlich kennt man die Relationen zwischen 4 Punkten eines Kreises oder 5 Punkten einer Kugel und einem beliebigen andern Punkte, wovon die letztere in einem Theorem FECHERBACH'S [Untersuchung der dreieckigen Pyramide p. 15] enthalten ist, welches CAYLEY [Cambr. math. J. II p. 268] und LUCHTERHANDT [Crelle J. 23 p. 375] reproducirt haben. Dieselben Relationen hat MÖBIUS [Crelle J. 26 p. 26] aus barycentrischen Principien abgeleitet. CAYLEY'S Verfahren, das auf dem Gebrauch der Determinanten beruht, ist folgendes.

Die Punkte A, B, C, D eines Kreises seien in Bezug auf ein System orthogonaler Axen, dessen Anfang O ist, durch die

* MöBIUS Kreisverwandtschaft §. 14.

Die Entwicklung dieser Determinante giebt (§. 15, 6)

$$\text{VI} \quad OA^2 \cdot BCDE + OB^2 \cdot CDEA + OC^2 \cdot DEAB \\ + OD^2 \cdot EABC + OE^2 \cdot ABCD = 0,$$

worin O irgend einen Punkt des Raumes bezeichnet. Nach den in §. 15, 7 angenommenen Bezeichnungen hat man

$$\mu_1 \cdot OA^2 + \mu_2 \cdot OB^2 + \mu_3 \cdot OC^2 + \mu \cdot OD^2 = OE^2,$$

d. h. wenn μ, μ_1, μ_2, μ_3 die coordinirten Coefficienten von E in Bezug auf die Pyramide $DABC$ sind, so ist für alle Punkte O auf einer um das Centrum E beschriebenen Kugel $\mu \cdot OD^2 + \mu_1 \cdot OA^2 + \mu_2 \cdot OB^2 + \mu_3 \cdot OC^2$ constant (FEUERBACH). Insbesondere ist

$$AB^2 \cdot CDEA + AC^2 \cdot DEAB + AD^2 \cdot EABC + AE^2 \cdot ABCD = 0, \\ \mu_1 \cdot DA^2 + \mu_2 \cdot DB^2 + \mu_3 \cdot DC^2 = DE^2.$$

Wenn man die Determinanten (III) und (V) bezüglich mit

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 & -2x & -2y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_3^2 + y_3^2 & -2x_3 & -2y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & x^2 + y^2 + z^2 & -2x & -2y & -2z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & -2x_4 & -2y_4 & -2z_4 \end{vmatrix}$$

multiplcirt, so findet man $\Sigma \pm d_{00} \dots d_{33}$ und $\Sigma \pm d_{00} \dots d_{44}$ (§. 5, 4), wobei im ersten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 0 \\ d_{01} = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 = AB^2 \\ d_{02} = x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2xx_2 - 2yy_2 = AC^2$$

u. s. w., im zweiten Falle

$$d_{00} = x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = 0 \\ d_{01} = x^2 + y^2 + z^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2xx_1 - 2yy_1 - 2zz_1 = AB^2$$

u. s. w. Daher ist die oben erwähnte Gleichung zwischen den Strecken, welche 4 Punkte eines Kreises verbinden, folgende (CAYLEY):

$$\text{VII} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

worin d_{ik} das Quadrat der Strecke vom i ten bis zum k ten Punkte bedeutet.

Die analoge Gleichung zwischen den Strecken, welche 5 Punkte einer Kugel verbinden, lautet CAYLEY:

$$\text{VIII} \quad \begin{vmatrix} 0 & d_{01} & d_{02} & d_{03} & d_{04} \\ d_{01} & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{02} & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{03} & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{04} & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten können nach §. 3, 17 entwickelt werden.

10. Die gefundenen Relationen [III] bis [VIII] gelten für Punkte einer Ellipse oder Hyperbel, eines Ellipsoids oder Hyperboloids, wenn man jede Strecke nach dem parallelen halben Diameter misst*.

Beweis. Wenn an die Stelle der Kugel eine der genannten Flächen zweiten Grades tritt und die coordinirten orthogonalen Axen mit den Hauptaxen der Fläche parallel sind, so geht die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = a + bx + cy + dz$$

in folgende über:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \epsilon_1 \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = 1 + b'x + c'y + d'z,$$

worin ϵ , ϵ_1 positive oder negative Einheiten bedeuten. Daher erscheint in der Gleichung [V]

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \epsilon \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \epsilon_1 \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2$$

statt $x^2 + y^2 + z^2$. Ist nun MA_1 der halbe Diameter der Fläche, welcher mit OA einerlei Richtung hat, sind ferner p , q , r die

* Die Geltung der obigen Sätze für Ellipse und Ellipsoid hat BRIOSCHI Crelle J. 50 p. 236 bemerkt.

Coordinationen von A_1 in Bezug auf die Hauptaxen der Fläche, so ergibt sich aus elementaren Gründen

$$x : y : z : OA = p : q : r : MA_1.$$

Weil aber, wie bekannt,

$$\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{q}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1 \left(\frac{r}{\gamma}\right)^2 = 1$$

ist, so hat man *)

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1 \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 = \frac{OA^2}{MA_1^2}.$$

Mithin kommen in (IV) und (VI) $\frac{OA^2}{MA_1^2}$, $\frac{OB^2}{MB_1^2}$, $\frac{OC^2}{MC_1^2}$, .. an die Stelle von OA^2 , OB^2 , OC^2 , .., während die übrigen Grössen unverändert bleiben.

Wenn man ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} & 1 & x & y & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y_1^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z_1^2}{\gamma^2} & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} & -2 \frac{x}{\alpha^2} & -2 \varepsilon \frac{y}{\beta^2} & -2 \varepsilon_1 \frac{z}{\gamma^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y_1^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z_1^2}{\gamma^2} & -2 \frac{x_1}{\alpha^2} & -2 \varepsilon \frac{y_1}{\beta^2} & -2 \varepsilon_1 \frac{z_1}{\gamma^2} \end{vmatrix}$$

multipliziert, so erhält man $\Sigma \pm d_{00} \dots d_{41}$, worin

$$d_{00} = \left. \begin{aligned} & \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} \\ & - 2 \frac{x^2}{\alpha^2} - 2 \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} - 2 \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} \end{aligned} \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} d_{01} &= \frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z^2}{\gamma^2} + \frac{x_1^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y_1^2}{\beta^2} + \varepsilon_1 \frac{z_1^2}{\gamma^2} \\ &\quad - 2 \frac{x x_1}{\alpha^2} - 2 \varepsilon \frac{y y_1}{\beta^2} - 2 \varepsilon_1 \frac{z z_1}{\gamma^2} \\ &= \left(\frac{x-x_1}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{y-y_1}{\beta}\right)^2 + \varepsilon_1 \left(\frac{z-z_1}{\gamma}\right)^2, \end{aligned}$$

*) Diese Eigenschaft ist von JOACHIMSTHAL Crelle J. 40 p. 32 angezeigt worden.

wofür man wie oben AB^2 dividirt durch das Quadrat des halben Diameters, der mit AB parallel ist, findet u. s. w.

11. Ein Kegelschnitt zweiten Grades ist durch einen seiner Brennpunkte O und 3 andere Punkte A, B, C bestimmt; daher müssen 4 Punkte eines Kegelschnitts und ein Brennpunkt desselben eine gewisse Relation haben. Die Rotationsfläche zweiten Grades, welche durch Rotation eines Kegelschnitts um seine Hauptaxe entsteht, ist durch einen ihrer Brennpunkte O und 4 andere Punkte A, B, C, D bestimmt, so dass eine Relation zwischen 5 Punkten einer solchen Fläche und einem ihrer Brennpunkte bestehen muss. Diese Relationen sind von Mörris (Crelle J. 26 p. 29) angegeben und bewiesen worden.

Man kann dieselben aus dem bekannten Satze ableiten, dass der Radius Vector $OA = r$ eines Kegelschnitts oder einer Rotationsfläche der angegebenen Art eine lineare Function der Coordinaten x, y oder x, y, z des Punktes A in Bezug auf beliebige Axen ist. Sind x_1, y_1 oder x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von B u. s. w., so hat man

$$\begin{array}{ll} r = a + bx + cy & r = a + bx + cy + dz \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ r_3 = a + bx_3 + cy_3 & r_4 = a + bx_4 + cy_4 + dz_4 \end{array}$$

folglich §. 8, 3)

$$\begin{vmatrix} r & 1 & x & y \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ r_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ r_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} r & 1 & x & y & z \\ r_1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_4 & 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. §. 13, 5, 6)

$$OA \cdot BCD - OB \cdot CDA + OC \cdot DAB - OD \cdot ABC = 0,$$

$$\begin{aligned} & OA \cdot BCDE + OB \cdot CDEA + OC \cdot DEAB \\ & + OD \cdot EABC + OE \cdot ABCD = 0. \end{aligned}$$

Wenn A, B, C, D auf der Rotationsfläche und zugleich auf einer durch O gehenden Ebene liegen, so ist $ABCD = 0$ und

$$\begin{aligned} & BCDE : - CDAE : DABE : - ABCE \\ & = BCD : - CDA : DAB : - ABC, \end{aligned}$$

folglich

$$OA \cdot BCD - OB \cdot CDA + OC \cdot DAB - OD \cdot ABC = 0,$$

d. h. die Rotationsfläche wird von einer durch einen ihrer Brennpunkte gelegten Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten, für welche jener Punkt ein Brennpunkt ist (Möbius l. c.).

12. Die Relation zwischen den Strecken, welche 5 Punkte des Raumes verbinden, ist zuerst von LAGRANGE in einer wenig entwickelten Form aufgestellt, dann von CARNOT wiederholt behandelt worden, ohne dass ein übersichtliches Resultat erreicht worden wäre (vergl. 3). Die einfachste Relation zwischen 5 Punkten des Raumes, A, B, C, D, E , deren Coordinaten in Bezug auf 3 beliebige Axen $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ u. s. w. sind, findet man, indem man die Identität (§. 2, 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} = 0$$

nach §. 3, 2 entwickelt und die gefundenen Determinanten 5ten Grades nach §. 13, 6 deutet, nämlich:

$$1. \quad BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0,$$

womit die in §. 13, 7 vorkommende bekannte Gleichung übereinstimmt. Wenn man die Volume der einzelnen Tetraeder durch ihre Kanten ausdrückt (§. 16, 14 Zusatz), so erhält man eine irrationale Gleichung, deren rechte Seite Null ist und deren linke Seite die Summe der Quadratwurzeln von 5 Determinanten 5ten Grades ist. Um diese Gleichung zu rationalisiren, hat man das Product aus den 16 Werthen zu bilden, welche die linke Seite vermöge der Zweideutigkeit von 4 unter jenen Quadratwurzeln annehmen kann *). Zur Auffindung eines rationalen Divisors der linken Seite genügt es aber schon, die Gleichung (1) mit einem ihrer Glieder zu multipliciren, weil das Product aus zwei Tetraedern eine rationale Function von den Quadraten

*) Vergl. SYLVESTER Cambr. and Dubl. math. J. 1853 Mai.

der Strecken ist, welche die Eckpunkte des einen Tetraeders mit denen des andern Tetraeders verbinden (§. 16, 14).

Dieser Divisor der Gleichung ist in einfacher Gestalt zuerst von CAYLEY [Cambr. math. J. 2 p. 268] direct entwickelt worden. Nach Analogie des in (9) mitgetheilten Verfahrens hat CAYLEY die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & u_5 \end{vmatrix}$$

mit der Determinante

$$-16R = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 & 1 & -2x_1 & -2y_1 & -2z_1 & -2u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 + u_5^2 & 1 & -2x_5 & -2y_5 & -2z_5 & -2u_5 \end{vmatrix}$$

multipliziert. Man findet (§. 5, 4) $-16R^2 = \sum \pm h_{00} \cdot \dots h_{55}$, worin $h_{ik} = h_{ki}$ (§. 6, 2) und zwar

$$h_{00} = h_{11} = \dots = h_{55} = 0, \quad h_{01} = h_{02} = \dots = h_{05} = 1,$$

$$\begin{aligned} h_{12} &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 \\ &\quad - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2 - 2u_1u_2 \\ &= x_1 - x_2^2 + y_1 - y_2^2 + z_1 - z_2^2 + (u_1 - u_2^2 \end{aligned}$$

u. s. w. Wenn die unbestimmten Grössen u_1, u_2, \dots, u_5 verschwinden, so verschwindet R (§. 3, 3). Versteht man dabei unter x_1, y_1, z_1 die orthogonalen Coordinaten des Punktes A u. s. w., so wird $h_{12} = AB^2$ u. s. w. Bezeichnet man die Quadrate der Strecken vom 1ten zum 2ten, 3ten, .. Punkte wie oben durch d_{12}, d_{13}, \dots , so hat man die Gleichung

$$II, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 & d_{45} \\ 1 & d_{15} & d_{25} & d_{35} & d_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

für die Quadrate der Strecken, welche fünf Punkte des Raumes verbinden.

Man kann diese Determinante nach §. 3, 17 oder einfach nach §. 3, 3 entwickeln. In dem letztern Falle erhält man

$$\delta_{01} + \delta_{02} + \delta_{03} + \delta_{04} + \delta_{05} = 0,$$

wenn man die Coefficienten, welche die Elemente der ersten Zeile des Systems haben, durch $\delta_{01}, \delta_{02}, \dots$ bezeichnet. Bei analoger Bezeichnung ist aber (§. 6, 5)

$$\delta_{01}^2 : \delta_{02}^2 : \delta_{03}^2 : \delta_{04}^2 : \delta_{05}^2 = \delta_{11} : \delta_{22} : \delta_{33} : \delta_{44} : \delta_{55},$$

weil die Determinante verschwindet und $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ (§. 3, 13) ist. Folglich hat man bei einer bestimmten Auswahl der Zeichen

$$+ \delta_{11} + + \delta_{22} + - \delta_{33} + - \delta_{44} + - \delta_{55} = 0,$$

womit nach §. 16, 14 die Gleichung (1) übereinstimmt.

Zusatz. Auf demselben Wege werden die Gleichungen zwischen den Quadraten der Strecken gefunden, welche 4 Punkte A, B, C, D einer Ebene und 3 Punkte A, B, C einer Geraden verbinden (§. 16, 13, 14). Es ist nämlich nach den angenommenen Bezeichnungen im ersten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und bei gehöriger Zeichenbestimmung

$$+ \delta_{11} + - \delta_{22} + + \delta_{33} + - \delta_{44} = 0$$

übereinstimmend mit $BCD - CDA + DAB - ABC = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} = 0;$$

im zweiten Falle

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} \\ 1 & d_{12} & 0 & d_{23} \\ 1 & d_{13} & d_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \delta_{11} + 1 \delta_{22} + 1 \delta_{33} = 0 ,$$

übereinstimmend mit $AB + BC + CA = 0$ d. i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus 9, VII und VIII. Wenn nämlich von 5 Punkten einer Kugel einer unendlich fern ist, so ist z. B.

$$\frac{d_{01}}{d_{01}} = \frac{d_{02}}{d_{01}} = \frac{d_{03}}{d_{01}} = \frac{d_{04}}{d_{01}} = 1 ,$$

und die übrigen 4 Punkte liegen auf einer Ebene. Und wenn von 4 Punkten eines Kreises einer unendlich fern ist, so liegen die übrigen 3 Punkte auf einer Geraden.







QA Beltzer, Richard
191 Theorie und Anwendung der
335 Determinanten 2. verm. Aufl.
1862

Placed &
Added to

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

